

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



ESTUDIO SOBRE CONTROL Y OBSERVACIÓN DE
SISTEMAS DINÁMICOS. APLICACIÓN A DRONES

POR

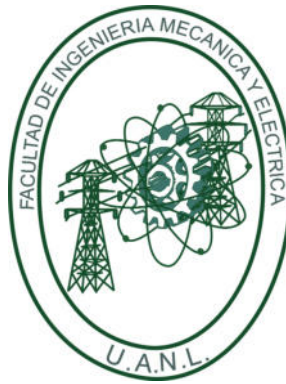
MARCO MICHELLE VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

14 DE DICIEMBRE DE 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



ESTUDIO SOBRE CONTROL Y OBSERVACIÓN DE
SISTEMAS DINÁMICOS. APLICACIÓN A DRONES

POR

MARCO MICHELLE VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

14 DE DICIEMBRE DE 2020



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Estudio sobre control y observación de sistemas dinámicos. Aplicación de drones", realizada por el alumno Marco Michelle Vázquez Rodríguez, con número de matrícula 1983198, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

Dr. Jesús de León Morales
Director

Dr. Alberto Cavazos González
Revisor

Dr. Oscar Salvador Salas Peña
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Octubre de 2020

A mi madre, por su amor y apoyo incondicional.

Agradecimientos

A mi madre, padre y hermanos, por estar presentes y ser el apoyo y fortaleza durante mis momentos de dificultad.

A mi familia en general, por siempre creer en mí.

Al Dr. Jesús de León Morales, por la formación, asesoramiento y la oportunidad que me brinda para realizar esta tesis.

A Judith, por ser mi fuente de inspiración.

A mis revisores el Dr. Alberto Cavazos y el Dr. Oscar Salas, por su colaboración que ha permitido enriquecer el contenido de la tesis.

A mi amigo Aldo Flores, quien ha sido mi compañero durante toda mi formación profesional.

A mis compañeros de doctorado Enrique A. y Susana M. por compartirme sus conocimientos.

Al CONACYT y la FIME, por el apoyo económico y la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado y permitirme concluir esta investigación.

RESUMEN

Publicación No. _____

Marco Michelle Vázquez Rodríguez

M.C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2020

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Jesús de León Morales

El presente trabajo aborda el problema de control de seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor bajo la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Se propone el diseño de algoritmos de control y observación para el cuadrirrotor basándose en técnicas de control no lineal por *Modos Deslizantes*, ya que brinda ventajas como: robustez ante incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas acotadas y dinámicas no modeladas; así como convergencia en tiempo finito y estabilidad asintótica.

El cuadrirrotor es uno de los vehículos aéreos no tripulados(VANT) de pequeña escala mas populares en la actualidad. Este encuentra un propósito dentro de una amplia cantidad de aplicaciones tales como entretenimiento, fotografía, investigación, generación de mapas, entre otras. Por lo tanto, es necesario desarrollar algoritmos de control efectivos que garanticen el desempeño durante la ejecución de dichas tareas.

Se propone la implementación de Controles por Modos Deslizantes Super Twisting Adaptativos basados en Observadores de Alto Orden por Modos Deslizantes para una clase de sistemas no lineales. Utilizando las herramientas de la teoría de Lyapunov, se proporciona un análisis de estabilidad donde se brindan condiciones de suficiencia para garantizar la convergencia en tiempo finito del sistema en lazo cerrado con el esquema control-observador propuesto.

Finalmente, se brinda un estudio comparativo para dar validez al esquema de interés frente a otros métodos de control no lineal basados en observador de estados, donde se evaluaron los desempeños de los esquemas estudiados con la finalidad de alcanzar el objetivo de control y conservar la energía.

Índice General

Resumen	VII
Índice de Figuras	XI
Índice de Tablas	XIII
Lista de Símbolos	XIV
1. Introducción	1
1.1. Vehículos Aéreos No Tripulados	1
1.1.1. Historia	2
1.1.2. Aplicaciones	4
1.1.3. Clasificación	5
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Antecedentes	7
1.4. Objetivo de la tesis	9
2. Modelado Matemático del Cuadrirrotor	10
2.1. Modelo matemático	10
2.2. Sistemas de referencia	11
2.2.1. Sistema de referencia Inercial	11
2.2.2. Sistema de referencia del cuerpo del cuadrirrotor	12
2.3. Ángulos de Euler	12
2.4. Ecuaciones de movimiento translacional	15
2.5. Ecuaciones de movimiento rotacional	17
2.6. Características de los actuadores	20

2.6.1. Motor de corriente directa	22
2.7. Representación en espacio de estados	24
2.8. Conclusiones	27
3. Diseño de controladores no lineales para el cuádrirrotor	28
3.1. Estrategia de control	28
3.2. Control Backstepping	31
3.2.1. Integrador Backstepping	32
3.3. Diseño del controlador backstepping para el cuádrirrotor	34
3.4. Control super-twisting simplificado	36
3.5. Diseño del controlador super twisting para el cuádrirrotor	42
3.6. Control super-twisting adaptativo simplificado	43
3.7. Diseño del controlador super twisting adaptativo para el cuádrirrotor	51
3.8. Resultados comparativos	53
3.9. Conclusiones	60
4. Diseño de observadores no lineales para el cuádrirrotor	62
4.1. Observador super twisting	63
4.2. Diseño del STO para el cuádrirrotor	67
4.3. Observador por modos deslizantes de alto orden	69
4.4. Diseño del HOSMO para el cuádrirrotor	73
4.5. Resultados	76
4.6. Conclusiones	81
5. Diseño de control-observador no lineal para el cuádrirrotor	82
5.1. Estrategia de control basada en observador	82
5.2. Control super twisting basado en observador por modos deslizantes de alto orden .	85
5.3. Control backstepping basado en observador por modos deslizantes de alto orden .	88
5.4. Resultados comparativos	90
5.5. Conclusiones	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	X
A. Perturbaciones	108
B. Fronteras de $L(t)$	112
C. Indices de desempeño	115

Índice de figuras

1.1. Clasificación de los VANT	6
2.1. Configuración del cuadrirrotor en el sistema de referencia inercial $\{I\}$ y del cuerpo del cuadrirrotor $\{B\}$	12
2.2. Movimiento de alabeo.	14
2.3. Movimiento de alabeo.	14
2.4. Movimiento de alabeo.	15
2.5. Circuito eléctrico básico de un motor de CD.	21
2.6. Motor CD. Izquierda: Motor brushless. Derecha: Motor de escobillas.	23
2.7. Circuito equivalente del motor de DC y el controlador del motor	24
3.1. Estrategia de control de vuelo del cuadrirrotor	29
3.2. Trayectorias del sistema convergiendo hacia el dominio Υ^* contenido en Υ^+	47
3.3. Trayectorias del cuadrirrotor.	56
3.4. Seguimiento de trayectorias traslacionales en tiempo finito.	57
3.5. Seguimiento de trayectorias de orientación en tiempo finito.	57
3.6. Ganancias adaptativas.	58
3.7. Entradas de control.	58
3.8. Valores RMS de las entradas de control.	59
3.9. Evolución de la variable deslizante (Control super twisting).	59
3.10. Evolución de la variable deslizante (Control super twisting adaptativo).	60
4.1. Seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor.	77

4.2. Observador super twisting: Estimación de las velocidades lineales.	78
4.3. Observador por modos deslizantes de alto orden: Estimación de las velocidades lineales.	78
4.4. Observador super twisting: Estimación de las velocidades angulares.	79
4.5. Observador por modos deslizantes de alto orden: Estimación de las velocidades angulares.	79
4.6. Reconstrucción de las perturbaciones entrantes a las dinámicas de posición.	80
4.7. Reconstrucción de las perturbaciones entrantes a las dinámicas de orientación.	80
5.1. Estrategia de control basado en observador para el cuadrirrotor.	83
5.2. Seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor. Arriba Izquierda: Trayectoria completa en el plano XYZ . Abajo Izquierda: Trayectorias en el plano XY al cambiar la referencia. Abajo derecha: Trayectoria del cuadrirrotor en el plano XY	92
5.3. Seguimiento de trayectorias de translación del cuadrirrotor.	93
5.4. Seguimiento de trayectorias de orientación del cuadrirrotor	93
5.5. Respuesta de las entradas de control.	94
5.6. Ganancias adaptativas del esquema ASTC+HOSMO	95
5.7. Error de seguimiento xyz	95
5.8. Error de seguimiento de los ángulos de orientacion ϕ, θ, ψ	96
A.1. Modelo de la velocidad del viento en Matlab/Simulink	109
A.2. Modelo de la velocidad del viento en Matlab/Simulink	109
A.3. Ráfaga de viento. Izquierda: Representación en simulink del modelo de ráfagas de viento [1]. Respuesta en el tiempo del modelo (A.0.1)	110
A.4.	110
A.5. Par de arrastre	110

Índice de tablas

3.1. Parámetros del cuadrirrotor.	53
3.2. Ganancias de los controladores.	55
4.1. Ganancias para la estimación de estados.	77
5.1. Parámetros nominales del cuadrirrotor.	90
5.2. Ganancias y parámetros para la sintonización de esquemas control-observador. . .	91
5.3. Evaluación de los índices de desempeño del error de seguimiento.	96
5.4. Evaluacion de los índices de desempeño del controlador.	97

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado	Unidades
I	Sistema de referencia inercial, Matriz de inercias	N/A, $N \cdot m \cdot s$
B	Sistema de referencia del cuerpo del cuadirrotor	N/A
ϕ, θ, ψ	Ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente	Rads
V	Vector de posiciones lineales	m
ξ	Vector de velocidades lineales	m/s
F_i	Fuerza de empuje del i-esimo roto	N
m	Masa	kg
g	Aceleración gravitatoria	m/s^2
η	Vector de posiciones angulares	Rads
ω	Vector de velocidades angulares	$Rads/s$
H	Momento angular del cuadirrotor	$kg \cdot m^2/s$
τ_M	Par de torsión del motor	$N \cdot M$
C_T	Coefficiente de empuje	$N \cdot s^2$
C_Q	Coefficiente de arrastre	$N \cdot m \cdot s^2$
v_i	Voltaje de entrada	v
R_i	Resistencia eléctrica	Ω
L_i	Inductancia eléctrica	H
J	Constante de inercia del motor	$N \cdot m \cdot s^2$
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	Elementos diagonales de la matriz de inercias	$kg \cdot m^2$
X_B, Y_B, Z_B	Ejes del cuerpo sistema de referencia del cuerpo del cuadirrotor	N/A
X_I, Y_I, Z_I	Ejes del sistema de referencia inercial	N/A
$R(\eta)$	Matriz de rotación	N/A
i_{mi}	Corriente electrica	A

Capítulo 1

Introducción

1.1. Vehículos Aéreos No Tripulados

En las ultimas décadas, el interés en los vehículos aéreos no tripulados (VANT) cuadrirrotores ha crecido de forma exponencial dentro de áreas de investigación como control, eléctrica y mecánica. Esta popularidad puede ser atribuida a las ventajas que nos brinda tales como alta maniobrabilidad, despegue y aterrizaje vertical (VTOL), bajo costo, simplicidad mecánica y la capacidad de volar en todas direcciones. debido a estas ventajas, han sido implementados en muchas aplicaciones tales como misiones de rescate y reconocimiento, monitoreo, vigilancia, cartografía, entre otras.

Un Vehículo Aéreo No Tripulado (también conocido como dron) se define como una máquina de vuelo que no cuenta con un operador o pilotos a bordo, el cual puede ser controlado remotamente por un piloto en una estación de control en tierra, o puede volar de forma autónoma basado en un algoritmo de vuelo pre-programado, o por sistemas dinámicos con automatización mas compleja y pueden llevar una carga letal o no letal [2].

Sin embargo, debido al su pequeño tamaño, la estabilidad durante el vuelo se ve afectada por perturbaciones externas inevitables e incertidumbres paramétricas afectan el desempeño del

vehículo. Aunado a esto, el cuadrirrotor es un sistema altamente no lineal, subactuado y existe un fuerte acoplamiento entre ecuaciones. Es por eso que se requiere de sistemas de control robustos que permitan realizar un seguimiento preciso de las trayectorias deseadas. Por Ejemplo, la altitud se ve afectada por varios factores como los efectos de las dinámicas de rotación, variación de peso, ráfagas de viento y ruido en las mediciones. Es por tal motivo que en esta tesis se propone el uso de esquemas de control-observador para dar solución al problema de control de vuelo seguimiento de trayectorias de un cuadrirrotores.

1.1.1. Historia

Los primeros registros que se tienen de los drones datan del año 425 a.C. Este dato se acredita a Arquitas de Tarantas, quien construyó un autómatas en forma de pichón de madera, bien balanceado, capaz de volar usando aire (algún tipo de vapor) encerrado al interior de su estómago. Se dice que el ave de Arquitas voló cerca de 200 m antes de caer al suelo, una vez que la energía fue consumida. El pichón no podía volar de nuevo, a menos que el mecanismo fuera restablecido [3] [4].

Durante la misma era, en algún lugar de China, cerca de los años 400 A.C. los chinos fueron los primeros en documentar la idea de una aeronave de vuelo vertical. La primera versión consistía de alas al final de un palo. Se hacía girar el palo entre las manos para generar empuje suficiente antes de salir en vuelo libre.

Varios siglos mas tarde, Leonardo Da Vinci, en 1483, diseñó una aeronave capaz de mantenerse en vuelo estable, llamado *tornillo aéreo* o *giroscopio de aire*. La idea era hacer girar un eje, y si se aplicaba la suficiente fuerza, la máquina podía girar y volar. Esta máquina es considerada por algunos expertos como el precursor del helicóptero moderno [3].

En 1916, menos de 15 años después del histórico vuelo de los hermanos Wright, se mostró la primera aeronave no tripulada moderna. Desarrollaron un giroscopio que estabilizaba el cuerpo del avión, para desarrollar el piloto automático. Esto es conocido como el principio del *control de*

altitud, y la aeronave fue llamada Hewitt-Sperry en honor a los dos inventores que lo diseñaron. Un año mas tarde, durante la primera guerra mundial fue introducido el primer VANT, registrando una amplia participación de la milicia estadounidense con vehículos no tripulados. Esos primeros drones eran muy poco confiables e imprecisos. Al mismo tiempo, su utilidad, su habilidad para influir sobre el campo de batalla, y su impacto en general en las aplicaciones militares no fue reconocido por la mayoría de los líderes militares y políticos. Mientras tanto, en Gran Bretaña, en la década de 1920, se desarrolló la aeronave no tripulada RAE 1921 Target: y en 1933, la Marina Real Utilizo el Queen Bee Target [3, 5–7].

El principal enfoque sobre los VANT que apoyaba el así llamado "tres D's" (es decir, misiones aburridas, sucias o peligrosas, en las cuales las operaciones con pilotos humanos serían una desventaja o de alto riesgo) destacaron el nicho natural para los VANT. Durante la guerra fría, se mejoraron las capacidades de reconocimiento y orientación. Esto atrajo la atención de la comunidad científica en la utilización de VANTs para misiones científicas, en las cuales las aeronaves sin piloto proporcionaban ventajas similares y mitigaban los riesgos [8]. A pesar de que los VANTs fueron utilizados en Vietnam, no fue hasta después de la Operación Tormenta del Desierto (1991) y el conflicto en la Península Balcánica, a principios de los 90's, cuando el interés en los VANTs ganó ímpetu. En esta misma década, el programa de Investigación Ambiental en Tecnología de Aeronaves y Sensores (ERAST) marcó un gran paso hacia el desarrollo de protocolos y capacidades para el empleo de los VANTs apoyando la investigación científica. Sin embargo, el registro militar de la mayoría de los sistemas de aeronave no tripulado dio lugar a una dicotomía en la naturaleza de la mayoría de los sistemas: Los VANTs capaces de llevar potentes y precisos sensores tendían a ser grandes y muy costosos, mientras que las pequeñas plataformas carecían de cargas útiles para entregar información precisa [7] [8].

Además, esto propicio a la miniaturización de los VANT's a finales de los 90's, donde se observaron numerosos esfuerzos por parte de pequeñas organizaciones para desarrollar o modificar los VANT's a medida que su propia investigación lo requería. Esto no solo redujo las limitaciones de las tareas de los drones en la milicia, sino que expandió sus alcances a aplicaciones comerciales

relacionadas a la agricultura, actividades científicas y recreativas, servicios, fotografía, por nombrar algunas.

La amplia cantidad de misiones que puede ejecutar un VANT, tomando en cuenta sus ventajas y desventajas, ha demostrado que existe un considerable potencial para ejecutar tareas de forma exitosa. En años recientes se ha incrementado ya que existen VANT que pueden volar por varios días. La Aerosonda Laima es un ejemplo de estos sistemas, y fue el primero en realizar un viaje trasatlántico. Sin embargo, el récord de duración de vuelo es del QinetiQ Zephyr, el cual permaneció en el aire por poco mas de dos semanas, teniendo como ventaja su diseño ligero y la utilización de energía solar como suministro.

Hoy en día, una gran variedad de VANT's estan disponibles para los usuarios, y para aquellos que no están muy relacionados en este campo, se puede afrontar una curva de aprendizaje empinada, lo cual puede ser una barrera de entrada. Adicionalmente, un número creciente de regulaciones afecta el uso de VANTs en la mayoría de los países, y puede ser confuso y desalentador para los principiantes [8]. Debido al número creciente de aplicaciones que han adquirido los drones, se ha incrementado su nivel de desempeño por lo cual se ha convertido en un tema de sumo interés en el área de control automático, mecanica y electrica.

1.1.2. Aplicaciones

Ya que que los drones brindan una supremacía sobre las tecnologías de sensado a distancia y proporciona beneficios como menor riesgo para la vida humana, bajo consumo de energía, facilidad para recopilación de datos, vuelo estable y resolución espacial ultra alta [9]. En la actualidad, existe una amplia variedad de aplicaciones para los drones y la selección de estos depende del fin para el cual es requerido. Las áreas de aplicación mas comunes de los drones son las civiles, militares y en la industria.

Civiles

- Entretenimiento.
- Fotografía aérea para reportaje y cine.
- Meteorología.
- Monitoreo del tráfico.
- Investigación

Militares

- Misiones de búsqueda y rescate.
- Transporte de carga.
- Bombardeo.
- Reconocimiento del territorio aliado y enemigo.

Industriales

- Inspección de paneles solares, puentes y líneas de alta potencia.
- Generación de mapas.
- Monitoreo de cultivos.
- Inventariado.

1.1.3. Clasificación

Los VANT han sido diseñados para cumplir con distintos propósitos, es por eso que en la literatura podemos encontrar varias formas de clasificarlos. Esas clasificaciones pueden ser enfocadas al tipo de despegue/aterrizaje, el tipo de ala, nivel de autonomía y al peso que soporta. Respecto al tipo de despegue/aterrizaje, estos pueden realizar despegue y aterrizaje verticales y no verticales. De acuerdo al tipo de ala, existen cuatro principales categorías donde se incluyen: a) ala rotativa

(helicópteros, multirrotores), con ventajas como vuelo suspendido y alta maniobrabilidad; b) ala fija (aeroplanos) , los cuales tienen como ventaja alta velocidad de crucero y larga duración de vuelo; c) ala flexible (ala delta, parapente), los cuales vuelan como aves e insectos; d) autosustentado (dirigibles, globos aerostáticos) cuya ventaja es la larga duración de vuelo [10]. La Figura 1.1 ilustra la clasificación de los VANT, despreciando los menos utilizados en la actualidad.

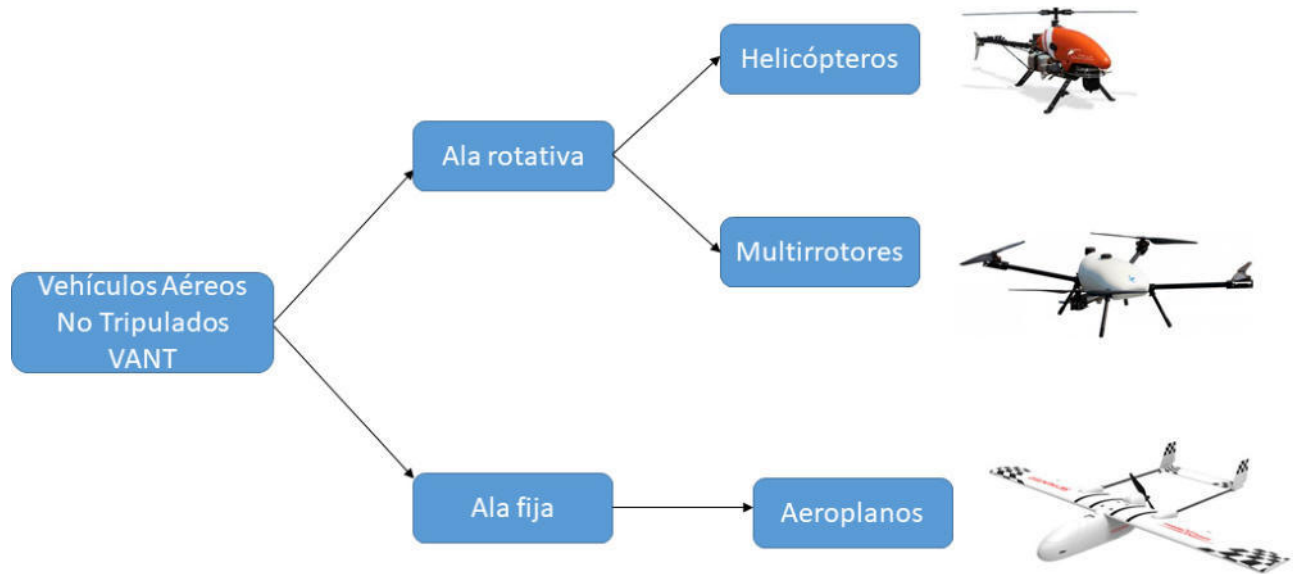


Figura 1.1: Clasificación de los VANT

Clasificar los VANT no solamente es útil para diferenciar los sistemas existentes sino que tiene importancia regulatoria. Esto se debe a que es poco probable que se desarrollen reglas que puedan adaptarse a todos los VANTs y como resultado se pueden imponer diferentes requisitos sobre las distintas categorías de los VANT basados en sus características [3].

1.2. Planteamiento del problema

El control de posición (orientación/dirección) y de velocidad es la base del control de vuelo del VANT, y el desempeño del control de vuelo afecta en gran medida la eficiencia de la seguridad durante el vuelo de la aeronave. Además, el problema de navegación es complejo y requiere de la

percepción de un ambiente a menudo restringido, especialmente en el caso de vuelos a baja altitud. Por otro lado, debido a su tamaño, la estabilidad del vehículo durante el vuelo se ve fácilmente afectada por perturbaciones externas impredecibles, y está sujeto a incertidumbres paramétricas. Por ejemplo, la altitud se ve afectada por varios factores como la dinámica de rotación, variaciones en el peso, ráfagas de viento, ruido en las mediciones, entre otras.

Adicionalmente, las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del cuadrirrotor son no lineales y están fuertemente acopladas. Cabe mencionar que el cuadrirrotor es un sistema subactuado, el cual posee tres grados de libertad para su movimiento translacional y tres para su movimiento rotacional, logrando el movimiento deseado controlando los cuatro rotores. Para afrontar estos inconvenientes se requiere del diseño de controladores suficientemente robustos para preservar la estabilidad y lograr un óptimo seguimiento de la trayectoria deseada, lo cual resulta ser una tarea difícil.

Aunado a esto, las técnicas de control por lo general requieren de un conocimiento exacto de los estados del sistema, y en el cuadrirrotor, se tiene una reducida cantidad de sensores disponibles. Además, la medición de los sensores puede estar corrompida por el ruido. Para afrontar este problema, es necesario reconstruir el estado desconocido, lo cual requiere de la implementación de un observador de estados.

1.3. Antecedentes

Para tratar el problema de control de los quadrirrotores, los investigadores han realizado esfuerzos y aplicado diversas técnicas de control no lineales y lineales de manera exitosa para hacer frente a la estabilidad de los cuatro rotores. Algunos ejemplos de controladores lineales aplicados a quadrirrotores incluyen controles proporcional integral (PI), proporcional derivativo (PD), proporcional integral derivativo, regulador lineal cuadrático (LQR) [11] [12] [13], control H-infinito [14], entre otros. Sin embargo, las técnicas de control lineal requieren de la linealización del modelo matemático, lo cual limita el rango de operación, y no garantizan robustez fuera del punto de

equilibrio, además de ser necesario el conocimiento de los parámetros aerodinámicos.

En relación al control no lineal, existe una amplia variedad de técnicas aplicadas a cuadrirrotores, donde se incluyen controlador lógico fuzzy combinado con un controlador PD [15], control backstepping [16], control backstepping y linealización por retroalimentación [17], redes neuronales [18], control adaptable [19], entre otros. Sin embargo, el inconveniente de estas técnicas de control es que requieren numerosas ganancias y la selección de estas carece de un método sistemático. Aunado a esto es necesario el conocimiento de los parámetros del modelo y parámetros aerodinámicos para garantizar la robustez, lo cual no es posible en la práctica. Por otro lado, algunas de estas técnicas requieren de una gran carga computacional, debido a que deben analizar una basta cantidad de información para generar la entrada de control.

Por otro lado, las estrategias de control basadas en el control por modos deslizantes (SMC) han demostrado ser un método efectivo para el rechazo a perturbaciones e incertidumbres paramétricas lo cual elimina la necesidad de un modelado exacto del sistema. Adicionalmente, esta técnica de control tiene ventajas como convergencia en tiempo finito y estabilidad asintótica. Sin embargo, debido a la naturaleza discontinua de los controles basado en modos deslizantes se tiene como principal inconveniente el fenómeno llamado *chattering* o ruido de alta frecuencia, el cual puede dañar tanto al sistema como a los actuadores. Con el objetivo de reducir el efecto del *chattering* se han llevado acabo diversos esfuerzos, un ejemplo de esto es el control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC) [20], el cual conserva la principal ventaja del SMC, mientras que al mismo tiempo presenta un mejor desempeño en relación a los efectos del *chattering* [21].

Entre las estrategias de control por modos deslizantes de alto orden, destaca el algoritmo de control super twisting, ofrece las mismas ventajas que los SMC tradicionales, solamente requiere del conocimiento de la variable deslizante s y, además, proporciona una señal de control continua lo cual reduce significativamente el *chattering*. Cabe mencionar que el *chattering* no puede ser eliminado, solo es posible ajustarlo. Estas técnicas han sido aplicadas exitosamente a cuadrirrotores en [22] para el control de orientación, donde se estabilizan los ángulos de Euler logrando buenos

resultados a una altura de 1 m. Sin embargo, se observa chattering en las entradas de control debido a la presencia de ruido en los sensores. En [23] se demostró su estabilidad y la convergencia en tiempo finito basada en el análisis de Lyapunov.

Ya que la superficie de deslizamiento está compuesta por los errores de seguimiento, se requiere de un conocimiento completo de los estados del sistema. Para solucionar este problema, en la literatura podemos encontrar controles por modos deslizantes basados en la información proporcionada por observadores. En [24] se presenta un control por modos deslizantes basado en un observador de perturbaciones, donde se logra un seguimiento óptimo de trayectorias y el chattering es reducido en la señal de control. Por otra parte, los observadores basados en técnicas por modos deslizantes, han sido ampliamente usados debido a ventajas como convergencia en tiempo finito e insensibilidad ante incertidumbres e.g. observadores super twisting (STO), observador de alto orden por modos deslizantes (HOSMO). En [25, 26] se presentan resultados para un controlador super twisting (STC) basado en observadores STO y HOSMO, donde se demuestra que implementar un STC basado en STO no es posible debido a los términos discontinuos que aparecen en la ley de control que no permiten satisfacer la condición del segundo orden deslizante. Para solucionar este problema, se propuso la implementación de un STC basado en un HOSMO, donde se logran suficientes condiciones para alcanzar el segundo orden deslizante ($s = \dot{s} = 0$).

1.4. Objetivo de la tesis

El objetivo de la presente tesis se centra en la sintetización de algoritmos de control no lineal basados en observador mediante diferentes técnicas por modos deslizantes, que permitan preservar la estabilidad de vuelo del cuadricóptero en presencia de perturbaciones externas e incertidumbre paramétrica, con el fin de lograr el seguimiento de trayectorias deseadas.

Capítulo 2

Modelado Matemático del Cuadrirrotor

En este capítulo, se presenta el desarrollo del modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del cuadrirrotor. Dicho modelo será representado en espacio de estados y será utilizado en el Capítulo 3 y 4 para el diseño de controladores y observadores no lineales.

2.1. Modelo matemático

Las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de un vehículo cuadrirrotor se obtienen empleando distintos enfoques basados en la mecánica de cuerpo rígido tales como ecuaciones Euler-Lagrange [27], el método quasi-lagrangiano [28] o las ecuaciones de Newton-Euler. Para cumplir con nuestros objetivos, se desarrollará el modelo del cuadrirrotor implementando el método de Newton-Euler.

Un cuadrirrotor consiste de cuatro rotores, ubicados en los vértices de un cuadrado. Cada rotor cuenta con hélices para generar un empuje en dirección perpendicular al plano definido por los rotores. Los cuadrirrotores tienen dos configuraciones, configuración en "X" y en "+". La configuración en "X" es considerada más estable, mientras que la configuración en "+" es más ágil. Por otro lado, el cuadrirrotor es un sistema subactuado que consta de 6 GDL, de los cuales solamente 4 pueden ser controlados directamente. Además, las ecuaciones de movimiento que rigen al cuadrirrotor son no lineales y están fuertemente acopladas.

El modelo dinámico de un cuádrirrotor consiste de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento rotacional y el movimiento translacional del vehículo. El propósito de este capítulo es entender a profundidad las dinámicas del cuádrirrotor y proporcionar un modelo suficientemente confiable para la simulación y control de su comportamiento. Por lo tanto, el estudio se dividirá en dos partes, una enfocada al análisis translacional y otra centrada en el movimiento rotacional.

Se consideraran las siguientes hipótesis para el modelado dinámico del cuádrirrotor:

Hipótesis 2.1 La estructura del cuádrirrotor se considera rígida y simétrica.

Hipótesis 2.2 El centro de masa coincide con el origen del sistema de referencia fijo al cuerpo del cuádrirrotor.

Hipótesis 2.3 Las hélices del cuádrirrotor son rígidas.

Hipótesis 2.4 Las fuerzas de empuje producidas por los rotores son proporcionales a la velocidad de empuje del giro de la hélice.

2.2. Sistemas de referencia

Cuando el cuádrirrotor ejecuta una tarea, realiza cambios de orientación y de posición, estos movimientos deben ser descritos con respecto a un sistema de referencia fijo, el cual se denomina sistema de referencia inercial. En los cuádrirrotores, por lo general su movimiento es descrito por medio de la ubicación de su centro de masa así como de la orientación de un sistema de referencia unida al mismo.

2.2.1. Sistema de referencia Inercial

El sistema de referencia inercial del cuádrirrotor $\{I\} (O_I, X_I, Y_I, Z_I)$, es un sistema de coordenadas fijo a la Tierra, donde la orientación de los ejes es denotada por la regla de la mano derecha.

El *norte* queda definido como la dirección inercial X_I , el este como la dirección inercial Y_I , Z_I apunta en dirección hacia arriba con respecto a la Tierra, mientras que O_I es el origen del sistema de referencia.

2.2.2. Sistema de referencia del cuerpo del cuadrirrotor

El origen O_B del marco de referencia del cuerpo del cuadrirrotor $\{B\}$ (O_B, X_B, Y_B, Z_B) coincide con el centro de masa del cuadrirrotor. X_B apunta hacia el frente del cuadrirrotor, Y_B apunta hacia la izquierda del cuadrirrotor, y Z_B apunta hacia arriba de la aeronave.

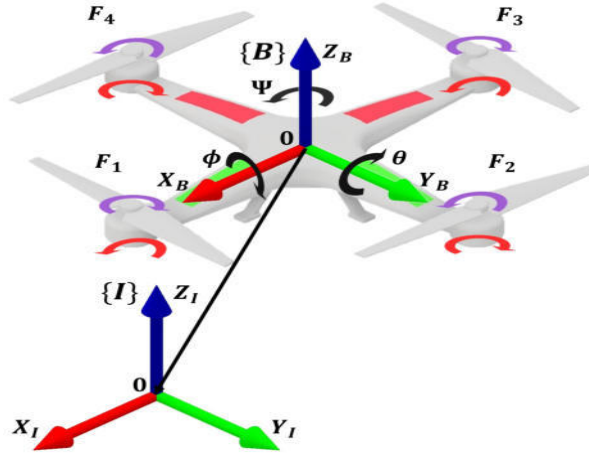


Figura 2.1: Configuración del cuadrirrotor en el sistema de referencia inercial $\{I\}$ y del cuerpo del cuadrirrotor $\{B\}$.

2.3. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler son tres ángulos introducidos por Leonhard Euler, que permiten describir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio Euclidiano tridimensional. Para describir dicha orientación se requiere de tres parámetros, los cuales pueden ser representados de muchas maneras. Se utilizan ángulos de Euler para los ejes xyz. Los ángulos de Euler también son utilizados para describir la orientación de un marco de referencia en relación a otro.

Los ángulos de Euler son comúnmente denotados como: $\left[-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right]$, $[-\pi \leq \psi \leq \pi]$,

los cuales representan una secuencia de tres rotaciones elementales, es decir rotaciones sobre los ejes del sistema de coordenadas. La combinación de estos ángulos es descrita por las siguientes matrices de rotación:

$$R_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \quad R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad R_Z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

donde, dado un ángulo ϑ , las expresiones de tales matrices de rotación corresponden $c_\vartheta = \cos(\vartheta)$, $s_\vartheta = \sin(\vartheta)$. La matriz de rotación $R(\eta)$ que toma en cuenta cada uno de los ejes, está definida como

$$R(\eta) = R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\phi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\phi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\psi c_\theta & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Esta matriz describe la rotación del cuerpo rígido del sistema de referencia del cuerpo del cuadrirotor al sistema de referencia inercial.

$$R(\eta) : \{B\} \rightarrow \{I\}$$

Los ángulos de rotación reciben el nombre de alabeo ϕ (roll), cabeceo θ (pitch) y guiñada ψ (yaw), y la forma de obtener los movimientos descritos sobre estos ángulos son ilustrados a continuación:

Alabeo: El movimiento de alabeo consiste en el giro del cuadrirotor sobre el eje x . Este movimiento es alcanzado incrementando (reduciendo) la velocidad de un motor lateral, mientras se reduce (incrementa) la velocidad del motor lateral opuesto.

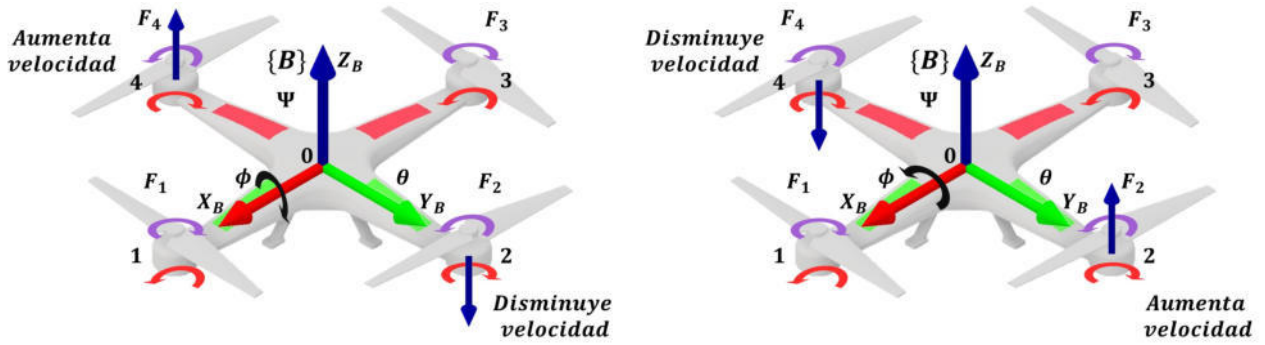


Figura 2.2: Movimiento de alabeo.

Cabeceo: Este movimiento consiste en el giro del cuadrirrotor sobre el eje y . Para alcanzar el movimiento de cabeceo, se realiza un procedimiento similar al de alabeo. Para este caso, se emplean los rotores frontal y trasero.

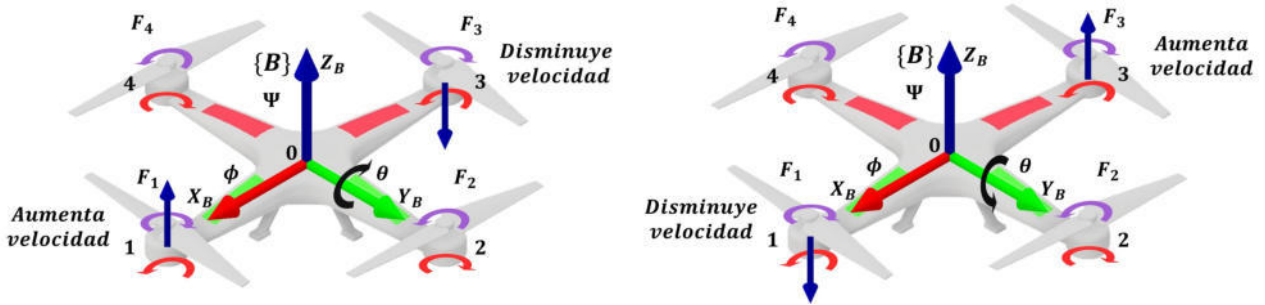


Figura 2.3: Movimiento de alabeo.

Guiñada: La guiñada es un fenómeno en el cual el cuadrirrotor gira a la izquierda o a la derecha sobre el eje z . Este movimiento es obtenido mediante el incremento (reducción) de la velocidad de los rotores frontal y trasero, mientras se reduce (aumenta) la velocidad de los rotores laterales.

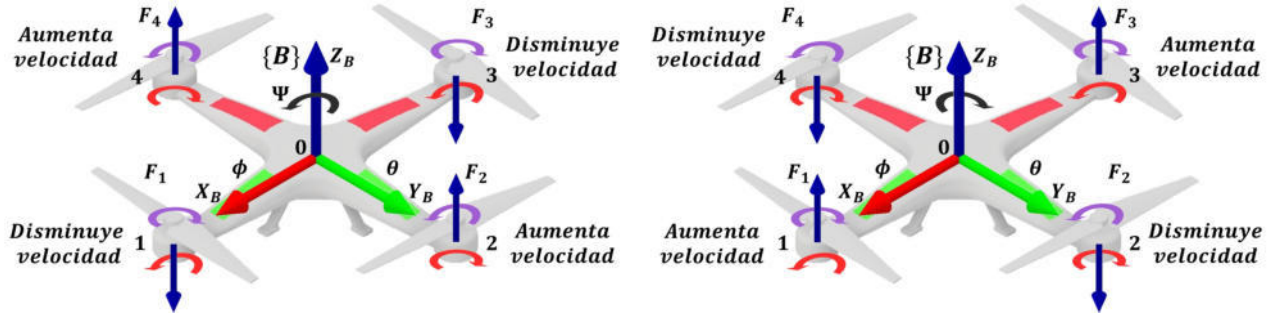


Figura 2.4: Movimiento de alabeo.

Cuando se tienen las misma velocidad en los cuatro rotores, los pares estarán balanceados. Por lo tanto el cuadrirrotor no girara, manteniéndose en una posición estable. Cuando la velocidad de los cuatro rotores se incremente de forma sincronizada, se vera afectada la altura del cuadrirrotor.

2.4. Ecuaciones de movimiento translacional

La posición lineal absoluta del cuadrirrotor en los ejes X , Y , Z está definido en el sistema de referencia inercial $\{I\}$ por medio del vector ξ . El ángulo de cabeceo θ determina la rotación del cuadrirrotor sobre el eje Y . El ángulo de alabeo ϕ determina la rotación sobre el eje X , y el ángulo de guiñada ψ sobre el eje Z [29]. En el sistema de referencia $\{B\}$ las velocidades lineales del cuadrirrotor están definidas por el vector v .

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Cada una de las hélices del vehículo genera una fuerza de empuje F_i en la dirección de Z_B . La fuerza F_i está relacionada con la velocidad rotacional Ω_i del i -ésimo rotor de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$F_i = c_T \rho A_{r_i} r_i^2 \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.4)$$

donde $A_{r_i}[m^2]$ es el área del disco producida por la rotación de la hélice del i -ésimo rotor, $r_i[m]$ es su radio, c_T es el coeficiente de empuje que depende de la geometría de las hélices, y $\rho[kg \cdot m^{-3}]$ representa la densidad del aire. De una forma alterna, la fuerza combinada de los cuatro rotores puede expresarse como un modelo de parámetros agrupadas de la siguiente manera:

$$F_i = k_F \Omega_i^2 \quad (2.5)$$

donde k_F es el coeficiente de empuje.

Cuando el cuadirrotor permanece en vuelo suspendido (hovering, en ingles) el empuje total aplicado F para sostenerlo durante el vuelo suspendido se calcula como:

$$F = \sum_{i=1}^4 F_i = k_M \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2, \quad T^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ya que se supone que el cuadirrotor es un cuerpo rígido, las ecuaciones de Newton-Euler pueden ser aplicadas para describir las dinámicas de este. En el sistema de referencia del cuerpo del vehículo $\{B\}$, la fuerza requerida para la aceleración de la masa $m\dot{V}$, y la fuerza centrífuga $V \times mV$ equivalen a la fuerza de gravedad $R(\eta)^T G$ y el empuje total de los cuatro rotores F

$$m\dot{V} + V \times mV = R(\eta)^T G + T^B \quad (2.7)$$

En el sistema de referencia inercial, la fuerza centrífuga puede ser despreciada, simplificando las ecuaciones de movimiento translacional. De este modo, solamente la fuerza gravitacional y la magnitud y dirección del empuje contribuyen a la aceleración de cuadirrotor

$$m\ddot{\xi} = G + R(\eta)T^B \quad (2.8)$$

Entonces, resolviendo (2.4.6) obtenemos la ecuación dinámica que rige la aceleración del centro

de masa del cuadirrotor, la cual está expresada de la siguiente manera

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_\theta c_\psi + s_\phi c_\theta s_\psi \\ s_\theta s_\psi - s_\phi c_\theta c_\psi \\ c_\phi c_\theta \end{bmatrix} F \quad (2.9)$$

La ecuación (2.4.7) se encuentra expresada en el sistema de referencia inercial $\{I\}$, y sera empleado para el diseño de las leyes de control.

2.5. Ecuaciones de movimiento rotacional

La orientación del cuadirrotor, es decir, su posición angular, está definida en el sistema de referencia inercial con los tres ángulos de Euler por medio del vector η , mientras que las velocidades angulares quedan definidas en el sistema de referencia $\{B\}$ por el vector ω [29]

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matriz de transformación para las velocidades angulares del sistema de referencia $\{I\}$ a el sistema de referencia $\{B\}$ es W_η , y del sistema de referencia $\{B\}$ al inercial es W_η^{-1} , como se muestra en las ec. (2.4.4)-(2.4.5)

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} V, \quad \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi T_\theta & c_\phi T_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$V = W_\eta \dot{\eta}, \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta / c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

donde $T_\vartheta = \tan(\vartheta)$.

Para el análisis de movimiento rotacional, se define el momento angular H del cuadirrotor como:

$$H = I\omega \quad (2.12)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia del cuadirrotor. Se supone que la estructura del cuadirrotor es simétrica, y los cuatro brazos están alineados con los ejes x y y del cuerpo del cuadirrotor. Esto implica que la matriz de inercia es una matriz diagonal con la siguiente estructura:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Los términos I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} describe los momentos de inercia del cuadirrotor en relación a los ejes X , Y y Z del sistema de referencia $\{B\}$, respectivamente.

Cabe mencionar que cada rotor produce un τ_{M_i} perpendicular al plano de rotación de las hélices. Nótese que los rotores 1 y 3 giran en dirección de las manecillas del reloj, mientras que los rotores 2 y 4 giran en sentido contrario. Todos giran sobre el eje definido por Z_B . El par se genera en dirección opuesta a la dirección de rotación de las hélices. Entonces, los pares τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau_\phi &= I[F_2 - F_4] \\ \tau_\theta &= I[F_3 - F_1] \\ \tau_\psi &= -\tau_{M_1} + \tau_{M_2} - \tau_{M_3} + \tau_{M_4} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde τ_ϕ denota la diferencia de par entre los rotores izquierdo y derecho, τ_θ indica la diferencia de par entre los rotores que giran en dirección opuesta a los anteriores, mientras que τ_ψ representa la diferencia de par entre los rotores que giran en sentido de las manecillas del reloj y los que giran

en la dirección opuesta a estas. La velocidad angular y la aceleración del rotor también producen par τ_{M_i} sobre el eje del rotacion del i-ésimo roto, el cual se calcula de la siguiente manera

$$\tau_{M_i} = k_M \Omega_i^2 + I_M \dot{\Omega}_i \quad (2.15)$$

donde k_M es el coeficiente de arrastre, I_M es el momento de inercia del i-ésimo rotor. Usualmente, el efecto de $\dot{\Omega}_i$ es considerado pequeño, simplificando la ec. (2.5.2).

El par τ_B consiste de los pares τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ . Agrupando el empuje total F y τ_B , se obtiene

$$\tau = \begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_F & k_F & k_F & k_F \\ 0 & -lk_F & 0 & lk_F \\ lk_F & 0 & -lk_F & 0 \\ -k_M & k_M & -k_M & k_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

En el sistema de referencia $\{B\}$, la aceleración angular de la inercia $I\dot{\omega}$, las fuerzas centrípetas $\omega \times I\omega$ son iguales al par τ_B

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \tau_B \quad (2.17)$$

A partir de (2.5.8), Es posible sustituir las componentes de ω y emplear τ_B descritas en (2.5.5), de lo cual obtenemos la siguiente expresión que describe el movimiento rotacional

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l[F_2 - F_4] \\ l[F_3 - F_1] \\ -\tau_{M_1} + \tau_{M_2} - \tau_{M_3} + \tau_{M_4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde el primer termino del lado derecho de (2.5.9) corresponde a las definiciones de τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ de la ec. (2.5.5). Resolviendo (2.5.8) podemos obtener las ecuaciones dinámicas que rigen el

comportamiento del cuadirrotor, expresado a continuación

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(I_{zz} - I_{yy})qr \\ -(I_{xx} - I_{zz})pr \\ -(I_{yy} - I_{xx})pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La ecuación de movimiento rotacional (2.5.10) está expresada en el sistema de referencia $\{B\}$.

2.6. Características de los actuadores

Los trabajos que han sido presentados en la literatura emplean un modelo simplificado del cuadirrotor, donde los efectos de las no linealidades y del desempeño de los actuadores son ignorados [30]. Los rotores se encargan de hacer funcionar el cuadirrotor, ya que de acuerdo a su potencia, estos generan un empuje mayor (o menor) que provoca que el cuadirrotor vuele más rápido (o más lento), y son la parte más importante de la aeronave. El empuje y el par, por la conservación de momento están expresados como

$$\begin{aligned} F_i &= c_T \rho A_{r_i} r_i^2 \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ Q_i &= c_Q \rho A_{r_i} r_i^3 \Omega_i^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde c_T y c_Q son los coeficientes de empuje y arrastre, ρ es la densidad del aire, A es el área del disco, r es el radio del disco.

Se consideran las entradas que pueden ser aplicadas para controlar el comportamiento del cuadirrotor. Se considera una entrada de control para el empuje vertical y una entrada para cada movimiento de orientación. Entonces, consideramos que los valores de los pares y fuerzas de entrada son proporcionales a las velocidades rotacionales de los rotores elevadas al cuadrado [31],

las cuales son representadas a continuación

$$\begin{aligned}
 U_Z = F &= k_F(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\
 U_\phi = \tau_\phi &= lk_F(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\
 U_\theta = \tau_\theta &= lk_F(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\
 U_\psi = \tau_\psi &= k_M(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Por lo general, los actuadores de los cuadrirrotores son motores de corriente directa sin escobillas (BLDC, por sus siglas en ingles) cuya dinámica es expresa por medio de ecuaciones diferenciales no lineales. Para simplificar el análisis, se supone que los actuadores corresponden a motores de CD de escobillas. El diagrama eléctrico del motor de CD ilustrado en la Figura 2.5, se compone de una fuente de voltaje v_i , una resistencia eléctrica R_i y de una inductancia L_i , conectados en serie.

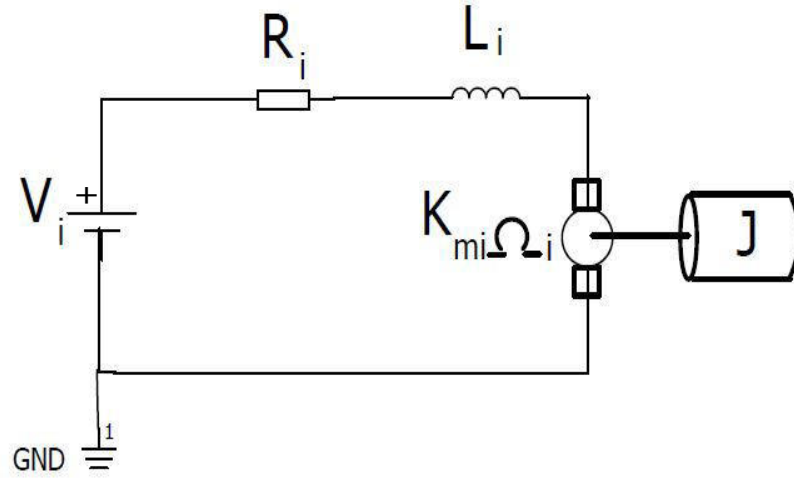


Figura 2.5: Circuito eléctrico básico de un motor de CD.

El circuito del motor de CD es alimentado por una voltaje v_i proporcional a la velocidad del motor. Este voltaje v_i corresponde a la entrada de control del motor. La resistencia R_i representa las pérdidas de energía producidas por el efecto Joule, provocado por el flujo de corriente a través del resistor. El inductor está relacionado a los bobinados del motor. Si aplicamos la ley de voltajes

de Kirchoff, la dinámica del i -ésimo rotor está descrita por la siguiente ecuación [5, 32]

$$v_i = R_i i_{mi} + L_i \frac{di_{mi}}{dt} + k_{mi} \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.22)$$

donde R_i , L_i , i_{mi} son la resistencia, inductancia y corriente de armadura del i -ésimo rotor, respectivamente. Mientras $k_{mi} \Omega_i$ es la fuerza contraelectromotriz, siendo k_{mi} la constante de par. La Debido a que los cuadrirrotores son de tamaño reducido, es posible despreciar el valor de la inductancia de armadura de los rotores, por lo que la ec. (2.6.3) resulta

$$v_i = R_i i_{mi} + k_{mi} \Omega_i \quad (2.23)$$

Por otro lado, la dinámica mecánica de los rotores es descrita por

$$J \dot{\Omega}_i = \tau_{M_i} - Q_i \quad (2.24)$$

donde J es el momento de inercia del rotor, τ_{M_i} corresponde al par producido por el i -ésimo rotor y Q_i es el par de reacción. De la ec. (2.6.1), el de reacción puede ser expresado por la siguiente ecuación

$$Q_i = k_{di} \Omega_i^2 \quad (2.25)$$

donde $k_{di} > 0$ depende de la densidad del aire, del radio y la forma del rotor

2.6.1. Motor de corriente directa

Los motores eléctricos de corriente directa (CD) son "actuadores continuos" que convierten la energía eléctrica en energía mecánica. El motor de corriente eléctrica logra esta transformación produciendo una rotación angular continua [33]. Los motores más comunes en los cuadrirrotores son los motores de escobillas sin escobillas.

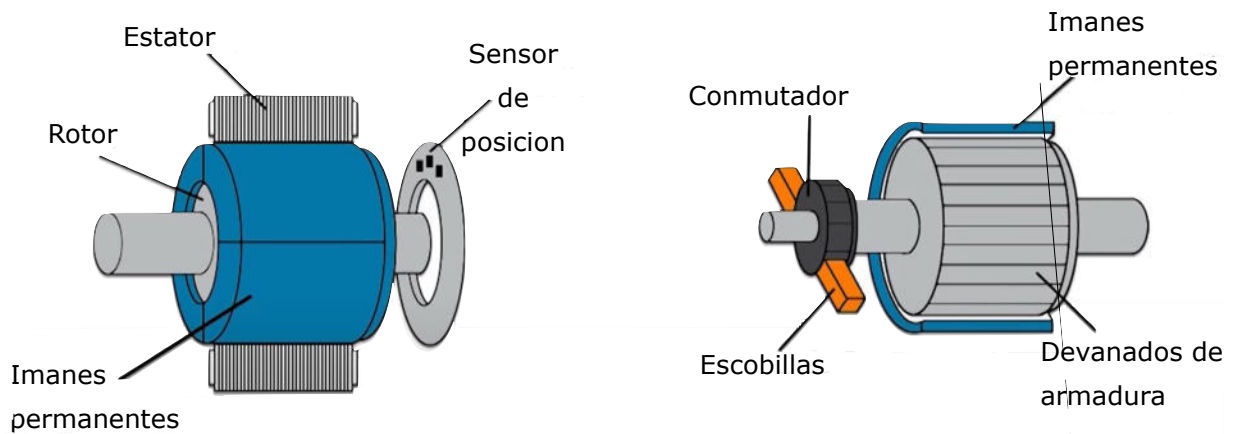


Figura 2.6: Motor CD. **Izquierda:** Motor brushless. **Derecha:** Motor de escobillas.

Un motor de escobillas convencional consiste de dos partes: el estator, el cual es el cuerpo estacionario de motor, y actúa como un electroimán de dos polos; y la parte interna, llamada armadura o rotor, la cual gira produciendo el movimiento. [34]. Por otro lado, como su nombre lo implica, los motores sin escobillas no utilizan escobillas (ver Fig. 2.6) para realizar el cambio de polaridad en el rotor. En los motores de escobillas, la corriente eléctrica pasa directamente por los devanados del estator, generando un campo electromagnético que interactúa con el campo magnético generado por los imanes permanentes del rotor, produciendo una fuerza que hace girar al rotor y por consiguiente al eje del rotor. Por otro lado en el motor sin escobillas (BLDC), ya que los devanados no se encuentran en el rotor, el rotor es un imán permanente. Los devanados no giran, sino que en vez de eso están fijos en el estator, y ya que los devanados no se mueven, no hay necesidad de utilizar escobillas ni de un conmutador [35]. En el motor BLDC, la parte que realiza el giro es el imán permanente, y la rotación es obtenida cambiando la dirección de los campos magnéticos generados por las bobinas estacionarias que lo rodean. Para controlar la rotación, se ajusta la magnitud y la dirección de corriente de los devanados.

El motor BLDC es construido con tres estatores, bobinados y un conjunto de polos de imanes permanentes ubicados en el rotor (ver Fig. 2.7). El controlador del motor regula la conmutación de la fuente de voltaje de CD para los bobinados del estator del motor. Cada fase entre armadura conduce polaridad negativa o positiva a 120 grados en secuencia para provocar la rotación del

motor [30].

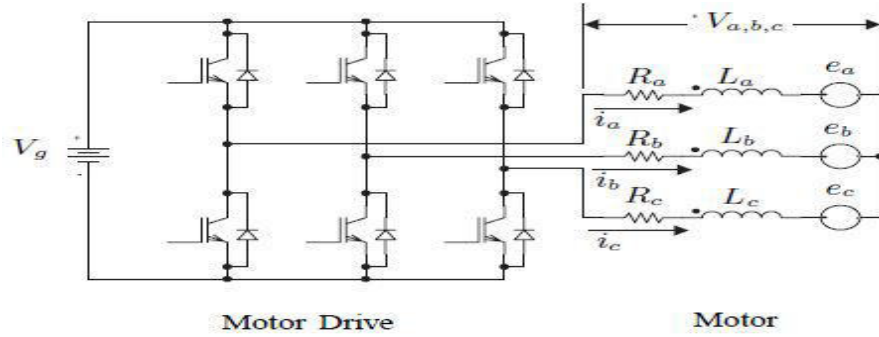


Figura 2.7: Circuito equivalente del motor de DC y el controlador del motor

2.7. Representación en espacio de estados

Un sistema dinámico no lineal con incertidumbres y perturbaciones externas es modelado por las siguientes ecuaciones diferenciales [36]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \delta(x), \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.26}$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$ es el estado, x_0 es la condición inicial, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $\delta(x) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada de perturbación al sistema, $y \in \mathbb{R}^s$ es el vector de salida. $f(x)$ y $g(x)$ son un campo vectorial suave.

Las ecuaciones dinámicas del cuadrirrotor (2.4.7) y (2.5.10) no consideran la entrada de perturbaciones e incertidumbres paramétricas que afectan al cuadrirrotor (ver Apendice A). Para incluir el efecto de estas perturbaciones e incertidumbres, la ec. (2.4.7) y (2.5.10) pueden ser reescritas

agregando el termino de perturbación $\delta(x)$ y considerando la ecuación (2.6.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (S_\psi S_\phi + C_\psi C_\phi S_\theta) \frac{U_z}{m} + \delta_x, \\ \ddot{y} &= (-C_\psi S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi) \frac{U_z}{m} + \delta_y, \\ \ddot{z} &= (C_\phi C_\theta) \frac{U_z}{m} - g + \delta_z,\end{aligned}\tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= U_\phi I_{xx}^{-1} - (I_{zz} - I_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi} I_{xx}^{-1} + \delta_\phi, \\ \ddot{\theta} &= U_\theta I_{yy}^{-1} - (I_{xx} - I_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} I_{yy}^{-1} + \delta_\theta, \\ \ddot{\psi} &= U_\psi I_{zz}^{-1} - (I_{yy} - I_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta} I_{zz}^{-1} + \delta_\psi.\end{aligned}\tag{2.28}$$

donde δ_j , $j = x, y, z, \phi, \theta, \psi$ corresponde a las perturbaciones e incertidumbres paramétricas de cada uno de los grados de libertad del cuadirrotor.

Para el diseño del controlador, se emplea el modelo del cuadirrotor en espacio de estados.

Sea $x \in R^{12 \times 1}$ un vector de estado el cual está definido como:

$$\begin{aligned}X &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T \\ &= [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]^T\end{aligned}\tag{2.29}$$

Entonces, es posible expresar las ecuaciones (2.7.2) y (2.7.3), en términos de variables de estado, como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ (S_{x_{11}} S_{x_7} + C_{x_{11}} C_{x_7} S_{x_9}) \frac{U_z}{m} + \delta_x \\ x_4 \\ (-C_{x_{11}} S_{x_7} + S_{x_{11}} C_{x_7} S_{x_9}) \frac{U_z}{m} + \delta_y \\ x_6 \\ (C_{x_7} C_{x_9}) \frac{U_z}{m} - g + \delta_z \\ x_8 \\ U_\phi I_{xx}^{-1} - (I_{zz} - I_{yy}) x_{10} x_{12} I_{xx}^{-1} + \delta_\phi \\ x_{10} \\ U_\theta I_{yy}^{-1} - (I_{xx} - I_{zz}) x_8 x_{12} I_{yy}^{-1} + \delta_\theta \\ x_{12} \\ U_\psi I_{zz} - (I_{yy} - I_{xx}) x_8 x_{10} I_{zz} + \delta_\psi \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde U_i , $i = X, Y, Z, \phi, \theta, \psi$ se calculan por

$$\begin{cases} U_Z = k_F(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_\phi = l k_F(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_\theta = l k_F(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_\psi = k_M(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{cases} \quad (2.31)$$

Por otro lado, la ecuación (2.7.5) puede ser reescrita de forma más simple como un conjunto de subsistemas de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi, \\ \dot{x}_{2i} &= f_i + g_i(x) u_i + \rho_i, \\ y_i &= x_{1i}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

con

$$\begin{array}{lll}
 f_X = 0, & g_X = \frac{(a_1 + a_2)}{m}, & \rho_X = \delta_x, \\
 f_Y = 0, & g_Y = \frac{(b_1 + b_2)}{m}, & \rho_Y = \delta_y, \\
 f_Z = -g, & g_Z = \frac{(C_{x_{11}} C_{x_9})}{m}, & \rho_Z = \delta_z, \\
 f_\phi = -I_\phi x_{10} x_{12}, & g_\phi = I_{xx}^{-1}, & \rho_\phi = \delta_\phi, \\
 f_\theta = -I_\theta x_8 x_{12}, & g_\theta = I_{yy}^{-1}, & \rho_\theta = \delta_\theta, \\
 f_\psi = -I_\psi x_8 x_{10}, & g_\psi = I_{zz}^{-1}, & \rho_\psi = \delta_\psi, \\
 I_\phi = \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}, & I_\theta = \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}, & I_\psi = \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}}.
 \end{array}$$

donde $a_1 = S_{x_{11}} S_{x_7}$, $a_2 = C_{x_{11}} C_{x_7} S_{x_9}$, $b_1 = -C_{x_{11}} S_{x_7}$, $b_2 = S_{x_{11}} S_{x_9} C_{x_7}$. Las funciones f_i y g_i representan términos nominales del grupo (2.7.2) y (2.7.3) ρ_i denota las incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

2.8. Conclusiones

En este capítulo se ha abordado el modelado matemático del cuádrirrotor con un enfoque en la mecánica del cuerpo rígido y basado en el método Newton-Euler. Se introdujeron los conceptos de sistema de referencia, el cual es necesario para poder describir los movimientos del cuádrirrotor, y el de ángulos Euler, necesarios para describir la orientación del cuádrirrotor. Además, fueron descritos los movimientos de orientación del cuádrirrotor, con los cuales se logra la translación del vehículo. Se estableció que el modelo matemático del cuádrirrotor es regido por dos conjuntos de ecuaciones que describen los movimientos traslacionales y rotacionales de vehículo. Por último, con la finalidad de diseñar controladores y observadores de estado, el modelo matemático del cuádrirrotor fue llevado a una representación en espacio de estados.

Capítulo 3

Diseño de controladores no lineales para el cuadirrotor

En este capítulo se abordará el estudio de 3 técnicas robustas de control no lineal. Estas estrategias son el control backstepping [37,38] y control super twisting constante [23] y adaptativo [39]. Además, se realiza una comparación de desempeño y seguimiento de estas estrategias de control.

3.1. Estrategia de control

En esta sección se presenta una estrategia de control de los seis grados de libertad (6-GDL) del cuadirrotor. Se pretende encontrar controladores $(U_Z, U_\phi, U_\theta, U_\psi)$ lo suficientemente robustos, que permitan estabilizar o el seguimiento de trayectorias del cuadirrotor aun en presencia de perturbaciones. Para el diseño de los controles, se consideran las siguientes hipótesis

Hipótesis 3.1 El modelo del cuadirrotor (2.7.5) es un modelo reducido que describe sus movimientos dinámicos.

Hipótesis 3.2 La estructura del cuadirrotores es un cuerpo rígido simétrico, del cual el origen del sistema de referencia $\{B\}$ coincide con el centro de gravedad.

Hipótesis 3.3 Las posiciones y las velocidades lineales y angulares son medibles, es decir, existe un conocimiento completo del estado.

A partir de (3.1.1), las trayectorias de referencia para los ángulos θ y ϕ pueden ser definidas como

$$\theta_{ref} = \arcsin\left(\frac{m}{U_Z}U_X\right), \quad \phi_{ref} = \arcsin\left(\frac{m}{U_Z}U_Y\right). \quad (3.2)$$

donde U_X y U_Y son dos entradas de control virtual definidas al diseñar los controladores. Si las leyes de control para θ y ϕ garantizan que $\phi = \phi_{ref}$ y $\theta = \theta_{ref}$, entonces la ecuación (3.1) resulta

$$\ddot{x} = U_X + \delta_x, \quad \ddot{y} = U_Y + \delta_y. \quad (3.3)$$

Por otro lado, el Lazo 2 de control, funciona como complemento del Lazo 1, y contiene las dinámicas de altitud de la ec. (2.7.2) y las dinámicas de orientación de la ecuación (2.7.3)

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= (C_\phi C_\theta) \frac{U_z}{m} - g + \delta_z, \\ \ddot{\phi} &= U_\phi I_{xx}^{-1} - (I_{zz} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi}I_{xx}^{-1} + \delta_\phi, \\ \ddot{\theta} &= U_\theta I_{yy}^{-1} - (I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi}I_{yy}^{-1} + \delta_\theta, \\ \ddot{\psi} &= U_\psi I_{zz}^{-1} - (I_{yy} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\theta}I_{zz}^{-1} + \delta_\psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por simplicidad, las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.4) serán expresadas como subsistemas para facilitar el diseño del controlador. Definimos

$$\begin{aligned} x_{1,X} &= X, & \dot{x}_{2,X} &= \dot{X} & x_{1,Y} &= Y, & \dot{x}_{2,Y} &= \dot{Y} & x_{1,Z} &= Z, & \dot{z}_{2,Z} &= \dot{Z} \\ x_{1,\phi} &= \phi, & \dot{x}_{2,\phi} &= \dot{\phi} & x_{1,\theta} &= \theta, & \dot{\theta}_{2,\theta} &= \dot{\theta} & x_{1,\psi} &= \psi & \dot{\psi}_{2,\psi} &= \dot{\psi} \end{aligned} \quad (3.5)$$

El sistema (3.1.1) y (3.1.4) es representado como un conjunto de subsistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi, \\ \dot{x}_{2,i} &= f_i + g_i(x)u_i + \rho_i, \\ y_i &= x_{1i}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

con

$$\begin{aligned}
f_X &= 0, & g_X &= \frac{\sin(x_{1,\theta})}{m}, & \rho_X &= \delta_x, \\
f_Y &= 0, & g_Y &= \frac{\sin(x_{1,\phi})}{m}, & \rho_Y &= \delta_y, \\
f_Z &= -g, & g_Z &= \frac{(C_{x_{1,\theta}} C_{x_{1,\phi}})}{m}, & \rho_Z &= \delta_z, \\
f_\phi &= -I_\phi x_{2,\theta} x_{2,\psi}, & g_\phi &= I_{xx}^{-1}, & \rho_\phi &= \delta_\phi, \\
f_\theta &= -I_\theta x_{2,\phi} x_{2,\psi}, & g_\theta &= I_{yy}^{-1}, & \rho_\theta &= \delta_\theta, \\
f_\psi &= -I_\psi x_{2,\phi} x_{2,\theta}, & g_\psi &= I_{zz}^{-1}, & \rho_\psi &= \delta_\psi, \\
I_\phi &= \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}, & I_\theta &= \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}, & I_\psi &= \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}}.
\end{aligned}$$

3.2. Control Backstepping

El control Backstepping está enfocado en la estabilización de sistemas dinámicos. Este difiere de los métodos de control óptimo en que sacrifica la optimalidad con el propósito de evitar las ecuaciones de Riccati, las cuales son difíciles de resolver para sistemas de "dimensión infinita" o de grandes dimensiones tal como las ecuaciones diferenciales parciales. El control backstepping es un método popular para controlar sistemas no lineales dado en la forma de estricta-retroalimentación de estados

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\dot{x}_{r-1} &= f_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) + g_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \\
\dot{x}_r &= f_r(x_1, x_2, \dots, x_r) + g_r(x_1, x_2, \dots, x_r)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_r)^T \in \mathfrak{R}$ representa el vector estado, f_i y g_i para $i=1, \dots, r$ son funciones conocidas. La idea principal del diseño del control backstepping es utilizar algunas variables de estado de (3.2.1) como "controles virtuales" o "pseudo controles", y dependiendo de las dinámicas de cada estado, diseñar leyes de control. El diseño backstepping es un procedimiento recursivo donde la función de Lyapunov es derivada para el sistema entero. El procedimiento recursivo puede ser fácilmente extendido al caso nominal de un sistema aumentado por un integrador. Esto es llamado integrador backstepping.

3.2.1. Integrador Backstepping

El diseño base del procedimiento recursivo es el integrador backstepping. Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}_1 = f(x) + g(x)x_2 \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (3.9)$$

donde $X = (x_1, x_2)^T \in \mathfrak{R}^{n+1}$ es el vector de estado, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control. El objetivo es diseñar una retroalimentación de estado tal que $x_1, x_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Se supone que f y g son conocidos. Este sistema puede ser visto como una conexión en cascada de dos subsistemas. El primer subsistema es (3.2.2) con x_2 como entrada de control, y el segundo subsistema es el integrador (3.2.3). La idea principal del diseño es tratar x_2 como una entrada de control virtual para la estabilización de las dinámicas de x_1 . Se supone que existe una ley de control suave por retroalimentación de estado $x_2 = \varphi(x_1)$ con $\varphi(0) = 0$. Entonces, el siguiente subsistema

$$\dot{x} = f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1) \quad (3.10)$$

es asintóticamente estable en el origen. Ahora, considere una función de Lyapunov $V_1(x)$ conocida, tal que

$$\dot{V}_1(x_1) = \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1)) \leq -W(x_1) \quad (3.11)$$

Con el propósito de diseñar la ley de control, $g(x_1)\varphi(x_1)$ es sumado y restado al lado derecho del subsistema (3.8), tal que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1) + g(x_1)[x_2 - \varphi(x_2)] \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{3.12}$$

Sea $z = x_2 - \varphi(x_1)$ el error entre el estado x_2 y el pseudo control $\varphi(x_1)$, el sistema (3.2.6) puede ser reescrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= [f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1)] + g(x_1)z \\ \dot{z} &= u - \dot{\varphi}(x_1)\end{aligned}\tag{3.13}$$

La derivada de $\varphi(x_1)$ es calculada empleando la siguiente expresión

$$\dot{\varphi}(x_1) = \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2]\tag{3.14}$$

Definiendo $u = v + \dot{\varphi}(x_1)$, donde v es la entrada de control nominal, el sistema transformado resulta de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1) + g(x_1)z \\ \dot{z} &= v\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde el subsistema \dot{x}_1 es asintóticamente estable en el origen.

Considérese la siguiente función de Lyapunov para el sistema completo

$$V_2(x_1, z) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}z^2\tag{3.16}$$

Entonces, su derivada con respecto al tiempo a lo largo de la solución de (3.2.9) resulta

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)\varphi(x_1) + g(x_1)z) + zv \\ &\leq -W(x_1) + \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} z + zv\end{aligned}\tag{3.17}$$

Si seleccionamos v , tal que

$$v = -kz - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}, \quad k > 0\tag{3.18}$$

resulta que

$$\dot{V}_2 \leq -kz^2 - W(x_1) \quad (3.19)$$

la cual es una función definida negativa. Por lo tanto, esto demuestra que el sistema (3.2.9) es asintóticamente estable en el origen ($x_1 = 0, z = 0$). Recordando que $u = v + \dot{\phi}$, es posible sustituir las expresiones (3.2.8) y (3.2.12) para calcular la forma final de la ley de control

$$u = -kz - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)x_2] \quad (3.20)$$

que estabiliza al sistema (3.2.7) asintóticamente en el origen.

3.3. Diseño del controlador backstepping para el cuadirrotor

Para el diseño de las leyes de control del cuadirrotor basado en la técnica backstepping, el modelo matemático del cuadirrotor es representado en subsistemas (ver ec. 3.1.6) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= X, Y, Z, \phi, \theta, \psi, \\ \dot{x}_{2,i} &= f_i + g_i(x)u_i + \rho_i, \\ y_i &= x_{1,i}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Entonces, se considera $x_{2,i}$ como el control virtual para la estabilización de las dinámicas de $x_{1,i}$. Por otro lado, el error de seguimiento y su dinámica están definidos por

$$\begin{aligned} e_1 &= x_{1,i} - x_{1,i}^d \\ \dot{e}_1 &= x_{2,i} - \dot{x}_{1,i} \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $x_{1,i}^d$ es el valor de referencia para x_1 y por lo menos dos veces diferenciable. Ahora, supongamos que $x_{2,i} = \varphi(x_{1,i})$, $\varphi(x_{1,i}) = 0$, tal que el siguiente subsistema

$$\dot{x}_{1,i} = \varphi(x_{1,i}) \quad (3.23)$$

es asintóticamente estable en el origen. Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov $V_1(x_{1,i})$ conocida, tal que

$$\dot{V}_1(x_{1,i}) = \frac{\partial V_1(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}} [\varphi(x_1)] \leq -W_1(x_{1,i}) \quad (3.24)$$

donde $W_1(x_{1,i}) > 0 \forall x_{1,i} \in \mathbb{R}$. Con el propósito de diseñar una ley de control, sumamos y restamos $\varphi(x_{1,i})$ a la derecha del subsistema $\dot{x}_{1,i}$ de la ec. (3.3.1). obteniendo

$$\dot{x}_{1,i} = \varphi(x_{1,i}) + x_{2,i} - \varphi(x_{1,i}) \quad (3.25)$$

Introduciendo el siguiente cambio de variable $z_i = x_{2,i} - \varphi(x_{1,i})$, entonces el subsistema $\dot{x}_{1,i}$ y las dinámicas de z_i pueden ser expresadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= \varphi(x_{1,i}) + z_i \\ \dot{z}_i &= f_i(x) + g_i(x)u_i + \delta_i - \dot{\varphi}(x_{1,i}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde la derivada de $\varphi(x_{1,i})$ se calcula por medio de la siguiente expresión

$$\dot{\varphi}(x_{1,i}) = \frac{\partial \varphi(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}} \frac{dx_{1,i}}{dt} = \frac{\partial \varphi(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}} \quad (3.27)$$

Definiendo

$$u_i = v_i + \dot{\varphi}(x_{1,i}) \quad (3.28)$$

donde u_i es la entrada de control nominal, el sistema transformado resulta de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi(x_{1,i}) + z_i \\ \dot{z} &= v_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nótese que $\dot{x}_{1,i}$ es asintóticamente estable en el origen cuando $x_{1,i}$ es cero. Ahora, consideramos la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema completo

$$V_2(x_{1,i}) = V_1(x_{1,i}) + \frac{1}{2}z_i^2 \quad (3.30)$$

cuya derivada con respecto al tiempo a través de las soluciones de (3.3.9) es

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_{1,i}) &= \frac{\partial V_1(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}} \frac{dx_{1,i}}{dt} + z_i v_i = \frac{\partial V_1}{\partial x_{1,i}} [\varphi(x_{1,i}) + z_i] + z_i v_i \\ &\leq -W_1(x_{1,i}) + \frac{\partial V_1}{\partial x_{1,i}} z_i + z_i v_i\end{aligned}\quad (3.31)$$

Si seleccionamos v_i , tal que

$$v_i = -k_{1,i} z_i - \frac{\partial V_1(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}}, \quad k > 0 \quad (3.32)$$

resulta que

$$\dot{V}_2 \leq -k_{1,i} z_i^2 - W_1(x_{1,i}) \quad (3.33)$$

es una función definida negativa. Por lo tanto el sistema (3.3.9) es asintóticamente estable en el origen $(x_{1,i} = 0, z_i)$.

Entonces, para encontrar el control original en (3.3.9), a partir de la ec. (3.3.7) y (3.3.12), resulta

$$v_i = f_i(x) + g_i(x) u_i + \delta_i - \frac{\partial \varphi(x_{1,i})}{\partial x_{1,i}} \frac{dx_{1,i}}{dt} \quad (3.34)$$

Entonces, para un caso particular, si seleccionamos $V_1(x_{1,i}) = \frac{1}{2} e_1$ y $\varphi(x_{1,i}) = -k_{2,i} e_1^2$, $k_{2,i} > 0$ y $V_2 = \frac{1}{2} e_2$, la ley de control resulta

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left[\ddot{x}_{1,i}^d - (k_{1,i} k_{2,i} + 1) e_1 - (k_{1,i} + k_{2,i}) e_2 - f_i(x) \right] \quad (3.35)$$

que estabiliza al sistema.

3.4. Control super-twisting simplificado

El control super twisting es un tipo de control por modos deslizantes de segundo orden que brinda características de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones acotadas, estabilidad asintótica y convergencia en tiempo finito. Además, el control super twisting es un

control continuo, lo cual permite reducir el chattering, el cual es un fenómeno característico de los controles por modos deslizantes.

Para el diseño de una ley de control, el algoritmo de control super twisting considera la clase de sistema dinámico descrito a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta\end{aligned}\tag{3.36}$$

donde $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ son términos no lineales conocidos y δ representa las perturbaciones externas e incertidumbres. El sistema incierto (3.4.1) es un sistema no lineal en la forma triangular

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x, u, \delta).$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, u, \delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) + g(x)u + \delta \end{pmatrix}.$$

El algoritmo de control super twisting [40] está definido por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}v &= -K_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + \lambda \\ \dot{\lambda} &= -\frac{K_2}{2} \text{sign}(s)\end{aligned}\tag{3.37}$$

donde $K_1, K_2 > 0$ son las ganancias del controlador, s denota a la variable deslizante y la función signo ($\text{sign}(x)$) es definida por la siguiente expresión

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}\tag{3.38}$$

Entonces, se toman en cuenta las siguientes hipótesis

Hipotesis 3.4.1: La función $\Phi(x, u, \delta)$ es Lipschitz continua con respecto a x y uniforme con respecto a u , es decir, existe una constante positiva η tal que $\|\varphi(x, u)\| \leq \eta\|x\|$.

Hipotesis 3.4.2: La perturbación δ es acotada, es decir, existe una constante positiva conocida γ tal que $|\varphi| \leq \gamma$.

Hipotesis 3.4.3: Una variable deslizante $s = s(t, x)$ es diseñada tal que las dinámicas deseadas del sistema (3.4.1) son alcanzadas cuando $s(x, t) = \dot{s}(x, t) = 0$.

Ahora, el diseño de la variable deslizante es expresado de la siguiente forma

$$s = e_2 + ce_1 \quad (3.39)$$

donde c es una constante positiva, $e_1 = x_1 - x_1^d$ y $e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d$ son los errores de seguimiento, y x_1^d es el valor de referencia. Las dinámicas de los errores de seguimiento están expresadas a continuación

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_1^d \end{aligned} \quad (3.40)$$

Entonces, las dinámicas de la superficie deslizante a lo largo de las trayectorias del sistema (3.4.1) están dadas por

$$\dot{s} = ce_2 + f(x) + g(x)u + \delta - \ddot{x}_1^d \quad (3.41)$$

Ahora, la siguiente retroalimentación es introducida

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[\ddot{x}_1^d - f(x) - ce_2 + v \right] \quad (3.42)$$

la cual fuerza la convergencia de las trayectorias del sistema (3.4.1) hacia la superficie deslizante, garantizando la condición del modo deslizante de segundo orden ($s = \dot{s} = 0$). Entonces, una nueva entrada de control super twisting es introducida mediante la siguiente expresión

$$v = -2L|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau \quad (3.43)$$

donde $L > 0$ es la ganancia del controlador, c es el coeficiente de deslizamiento.

Entonces, bajo la acción del control (3.4.7)-(3.4.8), las dinámicas de la variable deslizante en lazo cerrado están dadas por

$$\dot{s} = -2L|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \delta \quad (3.44)$$

Ahora, introducimos la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= s \\ z_2 &= -\frac{L^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s) d\tau + \delta \end{aligned} \quad (3.45)$$

Entonces, las dinámicas del sistema (3.4.9), en términos de las nuevas coordenadas, pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2L|z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{L^2}{2} \text{sign}(z_1) + \dot{\delta} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Notese que el sistema (3.4.11) solamente es dependiente de la ganancia de control L donde $2L = K_1$ y $\frac{L^2}{2} = K_2$.

Para el análisis de estabilidad del sistema (3.4.9), se emplea el enfoque de Lyapunov. Considérese el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= z_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para el sistema (3.4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2|\xi_1|^{\frac{1}{2}}} (-2L\xi_1 + \xi_2) \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{L^2}{2} \text{sign}(z_1) + \dot{\delta} \end{aligned} \quad (3.48)$$

El sistema (3.4.13) puede ser reescrito, de forma equivalente, como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 2|z_{1i}|^{\frac{1}{2}} \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{\infty}^{-1} C^T C = \begin{bmatrix} -2L & 0 \\ -L^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, y S_{∞} es una matriz simétrica definida positiva, solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$LS_{\infty} + A^T S_{\infty} + S_{\infty} A - C^T C = 0 \quad (3.49)$$

Para el estudio de convergencia en tiempo finito del error de seguimiento, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\xi) = \xi^T S_{\infty} \xi \quad (3.50)$$

la cual es una función cuadrática definida positiva y continuamente diferenciable. Tomando la primera derivada con respecto al tiempo de (3.4.15), tenemos

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}^T S_{\infty} \xi + \xi^T S_{\infty} \dot{\xi} \quad (3.51)$$

cuya solución es obtenida a través de la siguiente expresión

$$\dot{V}(\xi) \leq \frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} [-L\xi^T S_{\infty} \xi + 2\xi^T S_{\infty} \Phi] \quad (3.52)$$

Considerando la norma vectorial del termino no lineal $2\xi^T S_{\infty} \Phi$, de la **Hipótesis 3.4.1**, i.e. $\|\Phi\| \leq \eta$, $\forall \eta > 0$, resulta

$$\dot{V}(\xi) \leq -\frac{1}{2|z_1|^{\frac{1}{2}}} LV(\xi) + \frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \|S_{\infty}\| \eta \|\xi\|^2 \quad (3.53)$$

Adicionalmente, la función (3.4.20) satisface las siguientes desigualdades

$$\lambda_{\min}(S_{\infty}) \|\xi_i\|^2 \leq V(\xi_i) \leq \lambda_{\max}(S_{\infty}) \|\xi_i\|^2. \quad (3.54)$$

donde λ_{min} y λ_{max} son valores propios mínimos y máximos de la matriz S_∞ respectivamente. Entonces, resulta que

$$\dot{V}(\xi_i) \leq -\frac{L_i - \sigma_c}{2|z_{1i}|^{\frac{1}{2}}} V(\xi_i). \quad (3.55)$$

donde $\sigma_c = \frac{2\|S_\infty\|\eta_i}{\lambda_{max}(S_\infty)}$.

Tomando en cuenta que la desigualdad

$$|z_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{V(\xi)}{\lambda_{max}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

se satisface, entonces (3.86) puede ser reescrita como

$$\dot{V}(\xi) \leq -\mu V(\xi)^{\frac{1}{2}} \quad (3.57)$$

con $\mu = \frac{(L_i - \sigma_c)\lambda_{max}(S_\infty)^{\frac{1}{2}}}{2}$.

Seleccionando L tal que la siguiente desigualdad

$$L_i > \sigma_c = \frac{2\|S_\infty\|\eta_i}{\lambda_{max}(S_\infty)}. \quad (3.58)$$

se satisface, y $\mu > 0$, entonces $\dot{V}(\xi)$ es una función definida negativa, lo cual garantiza estabilidad asintótica del sistema.

El tiempo de convergencia de las trayectorias del sistema puede ser estimado tomando en cuenta la ec. (3.4.22). Resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos

$$2V(T)^{\frac{1}{2}} = 2V(0)^{\frac{1}{2}} - \mu T \quad (3.59)$$

Si despejamos algebraicamente el tiempo T , resulta que

$$T = \frac{2V(0)^{\frac{1}{2}}}{\mu}. \quad (3.60)$$

las dinámicas del error de seguimiento ξ convergen a cero en el tiempo finito T y alcanzan la convergencia al tiempo dado por la expresión anterior. Esto demuestra que el control (3.4.7) fuerza

las dinámicas del sistema hacia la superficie deslizante.

3.5. Diseño del controlador super twisting para el cuadirrotor

En esta sección se aborda el desarrollo de las leyes de control por medio del observador super twisting, a partir de la estrategia de control introducida en la seccion 3.1. El modelo matematico del cuadirrotor es representado en subsistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi, \\ \dot{x}_{2,i} &= f_i + g_i(x)u_i + \rho_i, \\ y_i &= x_{1,i}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Entonces, definimos la variable deslizante

$$s_i = e_{2,i} + c_i e_{1,i} \quad (3.62)$$

donde los $e_{1,i} = x_{1,i} - x_{1,i}^d$ y $e_{2,i} = x_{2,i} - \dot{x}_{1,i}^d$. Las dinámicas de los errores de seguimiento están expresadas por

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,i} &= e_{2,i} \\ \dot{e}_{2,i} &= \dot{x}_{2,i} - \ddot{x}_{1,i}^d \end{aligned} \quad (3.63)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la variable deslizante, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{e}_{2,i} + c_i e_{2,i} \\ &= f_i(x) + g_i(x)u_i + \delta_i - \ddot{x}_{1,i}^d + c_i e_{2,i} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Entonces, definimos una entrada de control

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} \left(\ddot{x}_{1,i}^d - c_i(x_2 - \dot{x}_{1,i}^d) - f_i(x) - 2L_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) - \frac{L_i^2}{2} \int_0^t \text{sign}(s_i) d\tau \right) \quad (3.65)$$

que fuerza la convergencia de las trayectorias del sistema hacia la superficie de deslizamiento. Nótese que $L_i > 0$ corresponde a la ganancia del controlador super twisting.

3.6. Control super-twisting adaptativo simplificado

El algoritmo de control super twisting es una técnica de control muy popular debido a las ventajas que ofrece frente a otros enfoques de control, mencionadas en la sección 3.4. Sin embargo, un inconveniente adicional a este algoritmo de control es que requiere del conocimiento de la cotas cotas del gradiente de perturbaciones/incertidumbres. En la práctica, estimar la cota de las perturbaciones/incertidumbres es una tarea difícil, por lo que tiende a sobrestimarse resultando en una sobrestimación de las ganancias del controlador [41,42]. Por lo tanto, la sobrestimación de las ganancias repercute directamente en la magnitud del controlador y en la magnitud del efecto del chattering.

El objetivo principal del controlador adaptativo es asegurar que la dinámica de la ganancia del controlador L sea tan pequeña como sea posible, y sea lo suficientemente grande para garantizar el rechazo de perturbaciones e incertidumbres paramétricas logrando robustez y un óptimo seguimiento de trayectorias, eliminando la necesidad del conocimiento de la cota de las perturbaciones/incertidumbres. Entonces, el algoritmo de control super twisting adaptativo [39] es introducido.

Se considera la clase de sistemas no lineales inciertos en la forma triangular

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x, t) + g(x, t)u + \delta(t)\end{aligned}\tag{3.66}$$

donde $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ denota la entrada de control. $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son funciones no lineales conocidas, mientras que $\delta(t)$ representa las incertidumbres y perturbaciones del sistema.

Con el fin de diseñar un controlador super twisting adaptativo que garantice la estabilidad del sistema (3.6.1), las siguientes hipótesis son introducidas

Hipotesis 3.6.1 Se diseña una variable deslizante $s = s(x, t)$ tal que las dinámicas deseadas del sistema (3.6.1) sean alcanzadas cuando se cumpla el modo deslizante de segundo orden (i.e. $s(x, t) = \dot{s}(x, t) = 0$).

Ahora, se considera una variable deslizante como de la siguiente manera

$$s = e_2 + ce_1 \quad (3.67)$$

donde $c > 0$ es el coeficiente de deslizamiento, $e_1 = x_1 - x_1^d$ y $e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d$. x_1^d es la señal de referencia. La derivada de los errores de seguimiento, resulta

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_1^d \end{aligned} \quad (3.68)$$

Entonces, las dinámicas de la superficie deslizante quedan expresadas como

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_1^d + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1^d) \\ &= f(x, t) + g(x, t)u + \delta(t) - \ddot{x}_1^d + ce_2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Se considera la siguiente retroalimentación de estado

$$u = \frac{1}{g(x, t)} \left(-f(x, t) - ce_2 + \ddot{x}_1^d + v \right) \quad (3.70)$$

que linealiza las dinámicas de la variable deslizante cuando no existe acción de las perturbaciones/incertidumbres en el sistema, mientras que la entrada de control v esta basada en el algoritmo super twisting, y está dada por

$$v = -2L(t)|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s) d\tau \quad (3.71)$$

donde $L(t) > 0$ es la ganancia del controlador que sera sintonizada por medio de una ley de adaptación. Note que la ganancia L del control (3.6.6), a diferencia del control (3.4.8), está en función del tiempo.

Entonces, bajo la acción de los controles (3.6.5) y (3.6.6) las dinámicas de la variable deslizante en lazo cerrado están dadas por

$$\dot{s} = -2L(t)|s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s) d\tau + \delta(t) \quad (3.72)$$

Ahora, se introduce la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} z_1 &= s \\ z_2 &= - \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s) d\tau \end{aligned} \quad (3.73)$$

Entonces, las dinámicas del sistema (3.6.7), en términos de las nuevas coordenadas, pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2L(t)|z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) + z_2 + \delta(t) \\ \dot{z}_2 &= -\frac{L^2(t)}{2} \text{sign}(z_1) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Nótese que el sistema incierto (3.6.7) es equivalente al sistema (3.6.9), y solamente depende de la ganancia $L(t)$.

Ahora, se introduce el análisis de estabilidad del sistema (3.6.9), utilizando el enfoque de Lyapunov. Considere el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) \\ \xi_2 &= \frac{z_2}{L(t)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Del sistema (3.6.9), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{L(t)}{2|\xi_1|} (-2\xi_1 + \xi_2) + \delta(t) \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{L(t)}{2|\xi_1|} (-\xi_1) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \xi_2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ahora, se introduce la siguiente hipótesis

Hipotesis 3.6.2 Supóngase que $\delta = \bar{\delta}|\xi_1|$, donde $\bar{\delta}$ es acotada. Entonces, existe una constante positiva ρ tal que $|\bar{\delta}| \leq \rho$.

Entonces, de la **Hipótesis 3.6.2**, el sistema (3.6.11) puede ser reescrito en su forma compacta como

$$\dot{\xi} = \frac{L(t)}{2|\xi_1|} (A - S_\infty^{-1} C^T C) \xi - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} B B^T \xi + C^T \bar{\delta} \quad (3.77)$$

con

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_\infty = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, S_∞ es una matriz simétrica definida positiva, solución de la ecuación algebraica de Lyapunov.

$$S_\infty + A^T S_\infty + S_\infty A - C^T C = 0 \quad (3.78)$$

Considerando que un el modo deslizante de segundo orden se ha establecido, es decir $|s| \leq \mu_1, |\dot{s}| \leq \mu_2$ [43], bajo la acción de control de (3.6.5), la siguiente definición es introducida.

Definición 1 considérese el sistema (3.6.12), y supóngase que el modo deslizante de segundo orden real es alcanzado; Entonces, existe $\mu^* > 0$ y $V_\xi = \xi^T S_\infty \xi$, tal que $\xi \in \Upsilon^*$, con $\Upsilon = \{\xi | V_\xi < \mu^*\}$.

Entonces, la magnitud del dominio Υ^* del segundo orden deslizante real determina la precisión practica de la ley de adaptación de la ganancia. Debido a la ley de adaptación, y ya que las perturbaciones e incertidumbres son desconocidas, la ganancia puede ser muy pequeña para hacer frente a las perturbaciones e incertidumbres del sistema. El control garantiza que las trayectorias del sistema pueden escapar de este dominio a un dominio mas grande Υ^+ en tiempo finito, y una vez que las trayectorias quedan envueltas en Υ^+ , las trayectorias regresarán al dominio Υ^* tan pronto como la ley de adaptación, dada a continuación, compense el efecto de la perturbación en el sistema.

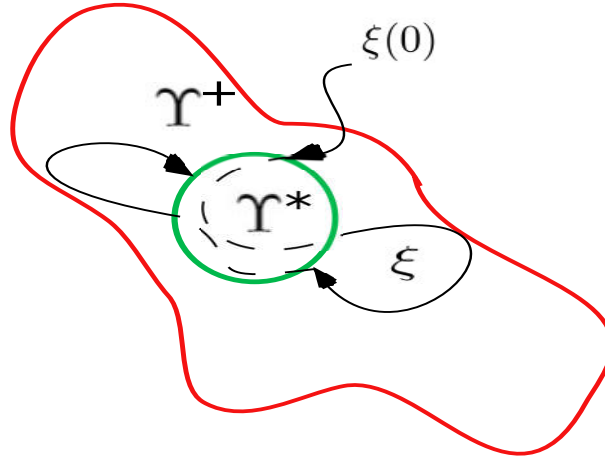


Figura 3.2: Trayectorias del sistema convergiendo hacia el dominio Y^* contenido en Y^+ .

Teorema 3.1 [39] Considerando el sistema no lineal incierto (3.6.1) en lazo cerrado con el control (3.6.6); Además, se supone que la perturbación δ satisface la **Hipótesis 3.6.2**; Entonces, el modo deslizante de segundo orden es establecido bajo la acción de control (3.6.5) y (3.6.6).

Ahora, la ley de adaptación es introducida

$$\dot{L}_i = \begin{cases} \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L(t)-L^*| + \frac{L(t)}{2}|s|^{\frac{1}{2}}}{(L(t)-L^*)\left(|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) + \vartheta_1\right)\vartheta_2} & \text{Si } L(t) \geq L^* \\ L^* & \text{Si } L(t) < L^* \end{cases} \quad (3.79)$$

donde $L(0) > L^* > 0$ y $L(t) \geq L^* > 0$, $\vartheta_{1i} = \frac{1}{L_i(t)} \int_0^t L_i^2(\tau) \text{sign}(s_i) d\tau$ y $\vartheta_{2i} = -\int_0^t \frac{L_i^2(\tau)}{2} \text{sign}(s_i(\tau)) d\tau$.

Además, $k > 0$ está dado por $k < \sqrt{2}(\bar{L}_{\eta_1} - \eta_2)$, con

$$\eta_{1i} = \frac{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(S_{\infty})}{2}, \quad \eta_{2i} = \frac{\|S_{\infty} C^T\| \varrho_i}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(S_{\infty})}, \quad \bar{L}_i > \frac{\eta_{1i}}{\eta_{2i}} \quad (3.80)$$

cuyos valores numéricos son $\eta_{1i} = 0.809$, $\eta_{2i} = 2.2881\varrho_i$, y $\bar{L}_i > 0.3536\varrho_i^{-1}$. Los términos $\lambda_{\min}(S_{\infty})$ y $\lambda_{\max}(S_{\infty})$ corresponden a los valores propios mínimos y máximos de la matriz S_{∞} , respectivamente. Además, $L^* > 0$ es introducido para obtener solamente valores positivos para la ganancia adaptable $L(t)$ y puede ser elegido arbitrariamente pequeño.

Prueba: Para el estudio de la estabilidad del sistema (3.6.12) en lazo cerrado, la siguiente función candidata de Lyapunov es considerada

$$V(\xi, L) = \xi^T S_\infty \xi + \frac{1}{2} (L(t) - L^*)^2 \quad (3.81)$$

donde $V(\xi) = \xi^T S_\infty \xi$, y $V(L) = \frac{1}{2} (L(t) - L^*)^2$. Nótese que estas funciones son positivas definidas. Entonces, derivando la función (3.6.16) con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.6.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(\xi_i, L_i)} = & \frac{L_i(t)}{2|\xi_1|} [-\xi_i^T S_\infty \xi_i - \xi_i^T C^T C \xi_i] + 2\xi_i^T S_\infty C^T \bar{\delta}_i \\ & + \dot{L}_i(t) \left((L_i(t) - L_i^*) - \frac{2}{L_i(t)} \xi_i^T S_\infty B B^T \xi_i \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Además, la función $V(\xi)$ satisface la norma de equivalencia

$$\lambda_{\min}(S_\infty) \|\xi_i\|^2 \leq V_{\xi_i} \leq \lambda_{\max}(S_\infty) \|\xi_i\|^2 \quad (3.83)$$

Entonces, obtenemos

$$|\xi_1| \leq \|\xi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(\xi)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(S_\infty)} \quad (3.84)$$

A partir de las expresiones (3.6.17) y (3.6.18), y considerando **Hipótesis 3.6.2**, i.e. $|\bar{\delta}| \leq \varrho$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, L) \leq & -L(t)\eta_1 V(\xi)^{\frac{1}{2}} - \frac{L(t)}{2} |\xi_1| + \eta_2 V(\xi)^{\frac{1}{2}} \\ & + \dot{L}(t) \left[(L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T S_\infty B B^T \xi \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

Sea $\beta = \dot{L}(t) \left[(L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} \xi^T S_\infty B B^T \xi \right]$ y agregando y substrayendo el termino $\frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*|$ en (3.6.20)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, L) \leq & -\psi V(\xi)^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \\ & - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| - \frac{L(t)}{2} |\xi_1| + \beta \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde $\psi = L(t)\eta_1 - \eta_2$.

Empleando la desigualdad de Jensen

$$(|a|^q + |b|^q)^{\frac{1}{q}} \leq |a| + |b|, \quad q > 0$$

Ahora, seleccionando $a = V(\xi)$, $b = V(L)$, $q = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$-\psi V(\xi)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \leq -\phi V(\xi, L)^{\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

con $\phi = \min(\psi, \frac{k}{\sqrt{2}})$ Ahora, si definimos la ley de adaptación

$$\dot{L}(t) = \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| + \frac{L(t)}{2} |\xi|}{(L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)} (\xi^T S_\infty B B^T \xi)}, \quad (3.88)$$

que produce que $\dot{L}(t)$ sea positiva. Entonces, a partir de la ec. (3.6.23) podemos reducir la ec. (3.6.11) tal que

$$\dot{V}(\xi, L) \leq -\phi V_{\xi, L}^{\frac{1}{2}} \quad (3.89)$$

Ahora, se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Para garantizar la estabilidad de $\dot{V}(\xi, L)$ se considera la ec. (3.6.24)

$$\dot{V}(\xi, L) \leq -\psi V^{\frac{1}{2}}(\xi) - \frac{k}{\sqrt{2}} |L(t) - L^*| \quad (3.90)$$

Además, empleando (3.6.24) es posible determinar las cotas de la ganancia adaptativa (ver Apéndice B). Se consideran las siguientes casos particulares.

Caso 1. Suponiendo que $L(t) \geq \bar{L} \frac{\eta_1}{\eta_2}$ resulta que $\psi = \bar{L}\eta_1 - \eta_2 > 0$, entonces

$$\dot{V}(\xi, L) \leq -\phi V^{\frac{1}{2}}(\xi, L) \quad (3.91)$$

Esto implica que existe una convergencia en tiempo finito del estado ξ hacia el dominio Υ^* , el cual es un conjunto compacto conteniendo el origen.

Caso 2. Ahora, suponiendo que $L^* < L(t) < \bar{L}$, resulta que $\psi < 0$. Entonces, de la desigualdad (3.6.25), $\dot{V}(\xi, L)$ se vuelve una función de signo indefinido. Cuando el estado ξ se incrementa, se satisface el **Caso 1**. Entonces, la convergencia del estado ξ hacia el dominio Y^* comienza en tiempo finito.

Ahora, es posible determinar la magnitud del dominio Y^* por medio de μ^* . A partir de la ec. (3.6.25), y considerando el **Caso 2**, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\dot{V}(\xi, L) \leq \psi V^{\frac{1}{2}}(\xi) - \frac{k}{2} (L(t) - L^*) < 0 \quad (3.92)$$

Entonces, resulta que

$$V(\xi) \leq \frac{k^2}{2\psi} |\bar{L} - L^*| \quad (3.93)$$

donde $Y^* = \{\xi | V(\xi) \leq \mu^*\}$ es un conjunto compacto conteniendo al origen. Considerando la ec. (3.6.25) en el **Caso 1**

$$\dot{V}(\xi, L) \leq -\psi V^{\frac{1}{2}}(\xi) - M|L(t) - L| \leq -\phi V^{\frac{1}{2}}(\xi, L) < 0 \quad (3.94)$$

siendo ϕ la velocidad de convergencia del estado (ξ, L) hacia el punto de equilibrio $(0, L^*)$. Definiendo $\alpha_1 = M|L(t) - L^*|$ con $L(t) > \bar{L} > 0$ y $\alpha_2 = \psi \sqrt{\xi^T S_{\infty} \xi} = \psi \|\xi\|$, donde α_1 y α_2 son funciones lineales de $L(t)$ y $\|\xi\|$, respectivamente. Resulta

$$\dot{V}(\xi, L) \leq -\psi \|\xi\| - M|L(t) - L^*| \quad (3.95)$$

Ahora, si seleccionamos L^* y k tal que

$$\psi > M = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad (3.96)$$

implica que el estado ξ converge a cero en menor tiempo que $L(t)$ convergiendo hacia L^* . Tomando en cuenta este hecho, es posible determinar el límite de la ganancia L mediante las siguientes

expresiones

$$\begin{aligned}
 \lim_{L \rightarrow L^*, \xi \rightarrow 0} \dot{L}(\xi, L) &= \lim_{L \rightarrow L^*, \xi \rightarrow 0} \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L - L^*|L + \frac{L^2|\xi|}{2}}{L(L - L^*) - 2\xi^T S_\infty B B^T \xi} \\
 &= \lim_{L \rightarrow L^*, \xi \rightarrow 0} \frac{-M|L - L^*|L + \frac{L^2|\xi|}{2}}{L(L - L^*) - 2\xi^T S_\infty B B^T \xi} \\
 &= \lim_{L \rightarrow L^*} \frac{-M|L - L^*|L}{L(L - L^*)} \\
 &= -\frac{k}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Por lo tanto, queda demostrado que no existe singularidad alguna en la ecuación (3.6.22) cuando L tiende a L^* y ξ tiende a 0. Adicionalmente, cuando $\psi = L(t)\eta_1 - \eta_2 < 0$, el estado ξ crece y en vez de tender hacia cero, y $L(t)$ crece hasta que ψ adquiere valor positivo y mayor que M , entonces se cumple el **Caso 1**.

De este modo, se garantiza, a partir de las ecs. (3.6.8)-(3.6.11), que la variable deslizante s y sus dinámicas \dot{s} convergen a cero en tiempo finito. Adicionalmente, cuando el estado ξ_2 converge a cero, es posible estimar el valor de la ecuación mediante la siguiente expresión

$$\delta(t) = \int_0^t \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s(\tau)) d\tau \tag{3.98}$$

3.7. Diseño del controlador super twisting adaptativo para el cuadrirrotor

El diseño de las entradas de control adaptativo para cuadrirrotor con el objetivo de lograr un seguimiento de trayectorias, también es basada en la estrategia de control de la sección 3.1. El modelo matematico del cuadrirrotor es representado por subsistemas (ver ec. 3.1.6) d la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi, \\
 \dot{x}_{2,i} &= f_i + g_i(x)u_i + \rho_i, \\
 y_i &= x_{1i}.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Ahora, se define la variable deslizante

$$s_i = e_{2,i} + c_i e_{1,i} \quad (3.100)$$

donde $e_{1,i} = x_{1,i} - x_{1,i}^d$ y $e_{2,i} = x_{2,i} - \dot{x}_{1,i}^d$, con $x_{1,i}^d$ es el valor deseado. Obteniendo la derivada de los errores de seguimiento con respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,i} &= e_{2,i} \\ \dot{e}_{2,i} &= \dot{x}_{2,i} - \ddot{x}_{1,i}^d \end{aligned} \quad (3.101)$$

Entonces, las dinámicas de la variable deslizante resultan

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{e}_{2,i} + c_i e_{2,i} \\ &= f_i(x, t) + g_i(x, t)u_i - \ddot{x}_{1,i}^d + c_i (x_{2,i} - \dot{x}_{1,i}^d) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Ahora, es posible definir una ley de control para lograr el seguimiento deseado

$$u_i = \frac{1}{g_i(x, t)} \left(\ddot{x}_{1,i}^d - f_i(x, t) - c_i e_{2,i} - 2L_i(t)|s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) - \int_0^t \frac{L_i^2(\tau)}{2} \text{sign}(s_i) d\tau \right) \quad (3.103)$$

que fuerza la convergencia del sistema hacia las trayectorias deseadas, reduciendo el error de seguimiento hacia cero, de forma asintótica. Entonces, bajo la acción de control (3.7.5), las dinámicas del error en lazo cerrado están dadas por

$$\dot{s}_i = -2L_i(t)|s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i) - \int_0^t \frac{L_i^2(\tau)}{2} \text{sign}(s_i) d\tau \quad (3.104)$$

donde $L_i(t)$ es la ganancia adaptativa del controlador super twisting.

Nota: Comparando los resultados del control (3.7.6) con los obtenidos la ec. (3.5.5) se comprueba que existe una similitud entre el diseño del control super twisting (3.4) y el control super twisting adaptativo (3.6), donde solamente existe un cambio en la dependencia con respecto al tiempo de la ganancia L , la cual es constante en la sección 3.4 y adaptativa en la sección 3.6.

3.8. Resultados comparativos

Para el estudio comparativo, se evaluarán las técnicas de control de este capítulo vía simulación numérica en MATLAB/Simulink para ilustrar el desempeño y la robustez de los controladores aplicándose al cuadrirrotor. Adicionalmente, para dar validez a los resultados, se introducen perturbaciones e incertidumbres del tipo aditivo al modelo nominal del cuadrirrotor. Los parámetros para el sistema (3.1.6) son los siguientes:

Parámetro	Valor	Unidad
<i>Masa</i> (m)	0.42	kg
<i>Gravedad</i> (g)	9.81	m/s^2
<i>Inercia en el eje X</i> (I_{xx})	0.0027	$kg \cdot m^2$
<i>Inercia en el eje Y</i> (I_{yy})	0.0029	$kg \cdot m^2$
<i>Inercia en el eje Z</i> (I_{zz})	0.0053	$kg \cdot m^2$

Tabla 3.1: Parámetros del cuadrirrotor.

Por otro lado, se establecen las siguientes condiciones iniciales para el modelo del cuadrirrotor

$$[x(0), y(0), z(0), \phi(0), \theta(0), \psi(0)] = [1, -1, 0, 0.5, 0.5, 0.5]$$

Adicionalmente, con el objetivo de ilustrar la robustez de los controladores estudiados, las dinámicas del movimiento translacional son afectadas por ruido blanco, con una magnitud de 0.0001, y por las siguientes perturbaciones

$$\delta_X = \sin(t)$$

$$\delta_Y = \cos(t)$$

$$\delta_Z = \sin(t)$$

Con el propósito de validar e ilustrar con mayor claridad la reducción de chattering del controlador super twisting adaptativo, las dinámicas del movimiento rotacional quedan exentas de ruido blanco y de perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

Los lazos de control de la estrategia propuesta para cada uno de los algoritmos de control están conformados por los siguientes controles y ángulos de referencia $(\theta_{ref}, \phi_{ref})$

Control Backstepping

Lazo 1

$$\begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \\ \phi_{ref} \\ \theta_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,X}^d + (k_{1,X} + k_{2,X})e_{2,X} + (1 + k_{1,X}k_{2,X})e_{1,X} \\ \ddot{x}_{1,Y}^d + (k_{1,Y} + k_{2,Y})e_{2,Y} + (1 + k_{1,Y}k_{2,Y})e_{1,Y} \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z}U_Y\right) \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z}U_X\right) \end{bmatrix}$$

Lazo 2

$$\begin{bmatrix} U_Z \\ U_\phi \\ U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\cos(x_{1,\phi})\cos(x_{1,\theta})} \left[\ddot{x}_{1,Z}^d - (k_{1,Z} + k_{2,Z})e_{2,Z} + (k_{1,Z}k_{2,Z} + 1)e_1 + g \right] \\ I_{xx} \left[\ddot{x}_{1,\phi} + (k_{1,\phi} + k_{2,\phi})e_{2,\phi} + (1 + k_{1,\phi}k_{2,\phi})e_{1,\phi} - (I_{yy} + I_{zz})x_{2,\theta}x_{2,\psi}I_{xx}^{-1} \right] \\ I_{yy} \left[\ddot{x}_{1,\theta} + (k_{1,\theta} + k_{2,\theta})e_{2,\theta} + (1 + k_{1,\theta}k_{2,\theta})e_{1,\theta} + (I_{zz} - I_{xx})x_{2,\phi}x_{2,\psi}I_{yy}^{-1} \right] \\ I_{zz} \left[\ddot{x}_{1,\psi} + (k_{1,\psi} + k_{2,\psi})e_{2,\psi} + (1 + k_{1,\psi}k_{2,\psi})e_{1,\psi} + (I_{xx} - I_{yy})x_{2,\phi}x_{2,\theta}I_{zz}^{-1} \right] \end{bmatrix}$$

Control Super Twisting Simplificado (STC)**Lazo 1**

$$\begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \\ \phi_{ref} \\ \theta_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,X}^d - c_X(x_{2,X} - \dot{x}_{1,X}^2) - 2L_X|s_X|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_X) - \frac{L_X^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_X)d\tau \\ \ddot{x}_{1,Y}^d - c_Y(x_{2,Y} - \dot{x}_{1,Y}^2) - 2L_Y|s_Y|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_Y) - \frac{L_Y^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_Y)d\tau \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z}U_Y\right) \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z}U_X\right) \end{bmatrix}$$

Lazo 2

$$\begin{bmatrix} U_Z \\ U_\phi \\ U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\cos(x_{1,\phi})\cos(x_{1,\theta})} \left(\ddot{x}_{1,Z}^d + g - c_Z e_{2,Z} - 2L_Z|s_Z|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_Z) - \frac{L_Z^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_Z)d\tau \right) \\ I_{xx} \left(\ddot{x}_{1,\phi}^d - c_\phi e_{2,\phi} + (I_{zz} - I_{yy})x_{2,\psi}x_{2,\theta}I_{xx}^{-1} - 2L_\phi|s_\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_\phi) - \frac{L_\phi^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_\phi)d\tau \right) \\ I_{yy} \left(\ddot{x}_{1,\theta}^d - c_\theta e_{2,\theta} + (I_{xx} - I_{zz})x_{2,\phi}x_{2,\psi}I_{yy}^{-1} - 2L_\theta|s_\theta|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_\theta) - \frac{L_\theta^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_\theta)d\tau \right) \\ I_{zz} \left(\ddot{x}_{1,\psi}^d - c_\psi e_{2,\psi} + (I_{yy} - I_{xx})x_{2,\psi}x_{2,\theta}I_{zz}^{-1} - 2L_\psi|s_\psi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_\psi) - \frac{L_\psi^2}{2}\int_0^t \text{sign}(s_\psi)d\tau \right) \end{bmatrix}$$

Control Super Twisting Adaptativo Simplificado (ASTC)

Lazo 1

$$\begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \\ \phi_{ref} \\ \theta_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,X}^d - c_X(x_{2,X} - \dot{x}_{1,X}^2) - 2L_X(t)|s_X|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_X) - \int_0^t \frac{L_X^2(\tau)}{2} \text{sign}(s_X) d\tau \\ \ddot{x}_{1,Y}^d - c_Y(x_{2,Y} - \dot{x}_{1,Y}^2) - 2L_Y(t)|s_Y|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_Y) - \int_0^t \frac{L_Y^2(\tau)}{2} \text{sign}(s_Y) d\tau \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z} U_Y\right) \\ \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_Z} U_X\right) \end{bmatrix}$$

Lazo 2

$$\begin{bmatrix} U_Z \\ U_\phi \\ U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\cos(x_{1,\phi})\cos(x_{1,\theta})} \left(\ddot{x}_{1,Z}^d + g - c_Z e_{2,Z} - 2L_Z(t)|s_Z|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_Z) - \int_0^t \frac{L_Z^2(\tau)}{2} \text{sgn}(s_Z) d\tau \right) \\ I_{xx} \left(\ddot{x}_{1,\phi}^d - c_\phi e_{2,\phi} + (I_{zz} - I_{yy})x_{2,\psi}x_{2,\theta}I_{xx}^{-1} - 2L_\phi(t)|s_\phi|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_\phi) - \int_0^t \frac{L_\phi^2(\tau)}{2} \text{sgn}(s_\phi) d\tau \right) \\ I_{yy} \left(\ddot{x}_{1,\theta}^d - c_\theta e_{2,\theta} + (I_{xx} - I_{zz})x_{2,\phi}x_{2,\psi}I_{yy}^{-1} - 2L_\theta(t)|s_\theta|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_\theta) - \int_0^t \frac{L_\theta^2(\tau)}{2} \text{sgn}(s_\theta) d\tau \right) \\ I_{zz} \left(\ddot{x}_{1,\psi}^d - c_\psi e_{2,\psi} + (I_{yy} - I_{xx})x_{2,\phi}x_{2,\theta}I_{zz}^{-1} - 2L_\psi(t)|s_\psi|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_\psi) - \int_0^t \frac{L_\psi^2(\tau)}{2} \text{sgn}(s_\psi) d\tau \right) \end{bmatrix}$$

La Tabla 3.2 contiene las ganancias empleadas para la sintonización de los controladores

	STC		ASTC			Backstepping	
	c	L	c	k	L^*	k_1	k_2
Control longitudinal, x	4	2	4	0.15	0.008	15	7
Control latitudinal, y	4	2	4	0.15	0.008	15	5
Control de altitud, z	4	3	5	0.055	0.008	15	7
Control de alabeo, ϕ	4	3	4	0.05	0.008	15	5
Control de cabeceo, θ	4	3	4	0.04	0.008	15	5
Control de guiñada, ψ	4	3	4	0.002	0.008	15	5

Tabla 3.2: Ganancias de los controladores.

Con la finalidad de ilustrar el desempeño de los controladores, la trayectoria de referencia es diseñada tal que el cuadrirrotor realice movimientos lineales sobre los ejes xyz en ambas direcciones, y comienza con un despegue en diagonal de la posición de reposo hacia una altura de 1.7 m (ver Figura 3.3). A continuación, se muestran los resultados comparativos obtenidos de la simulación

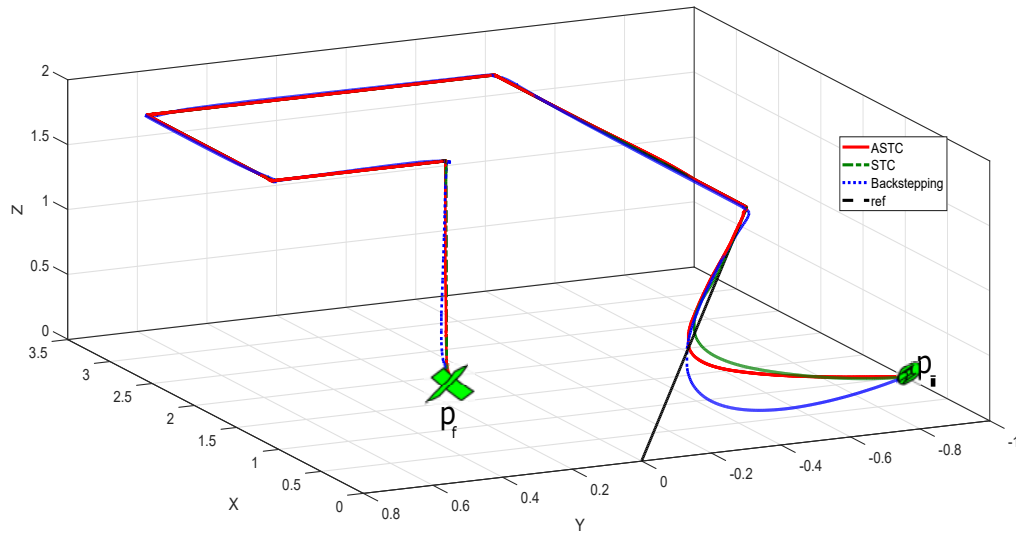


Figura 3.3: Trayectorias del cuadrirrotor.

El seguimiento de las trayectorias de translación y de orientación se muestran en las Figura 3.4 y 3.5, donde cada movimiento es ilustrado individualmente y conseguido por cada uno de los controladores. Es posible observar que la respuesta del controlador ST adaptativo corrige de forma mas lenta el error, sin embargo las trayectorias del cuadrirrotor convergen al mismo tiempo empleando los tres controladores. Por otro lado, es posible observar que el seguimiento de trayectorias realizado por medio del controlador backstepping se ve mas afectado por las perturbaciones. Ya que la trayectoria del angulo de guiñada se estableció como libre y seleccionado por el usuario, se selecciono como $\psi_{ref} = 0.07 \sin(t)$

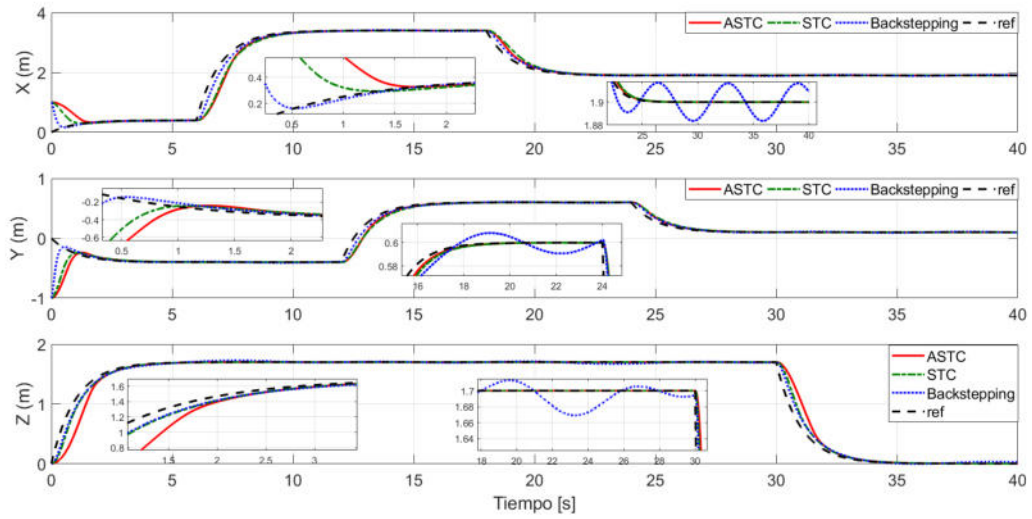


Figura 3.4: Seguimiento de trayectorias traslacionales en tiempo finito.

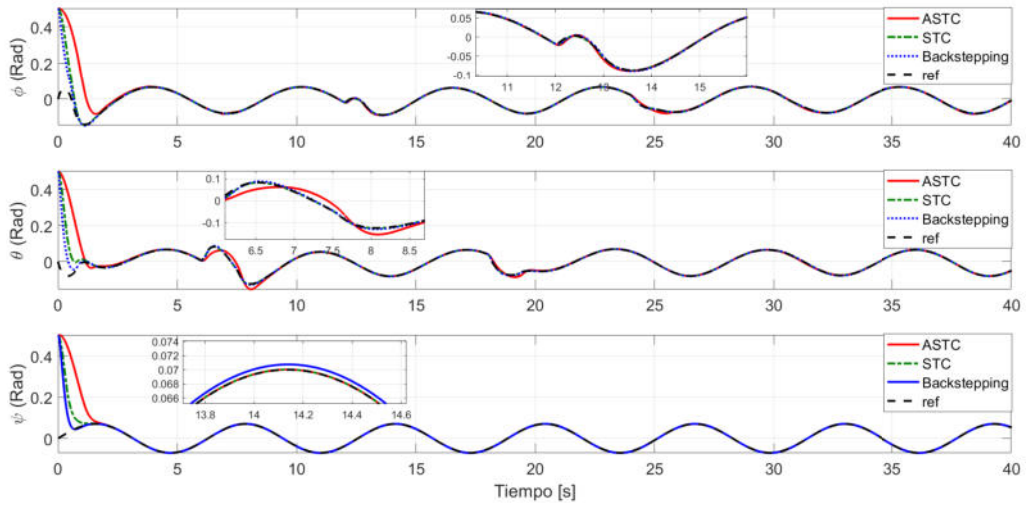


Figura 3.5: Seguimiento de trayectorias de orientación en tiempo finito.

La Figura 3.6 muestra el comportamiento de las ganancias adaptativas, sintonizadas por medio de la ley de adaptación (3.6.14), mientras que la Figura (3.7) ilustra la señal de cada una de las entradas de control reales del cuadrirotor. Adicionalmente, el comportamiento dinámico de las ganancias adaptativas, permiten analizar la forma en que el chattering es atenuado.

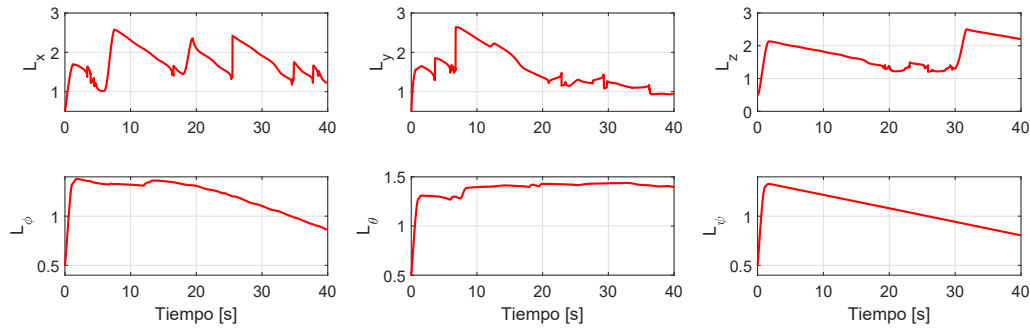


Figura 3.6: Ganancias adaptativas.

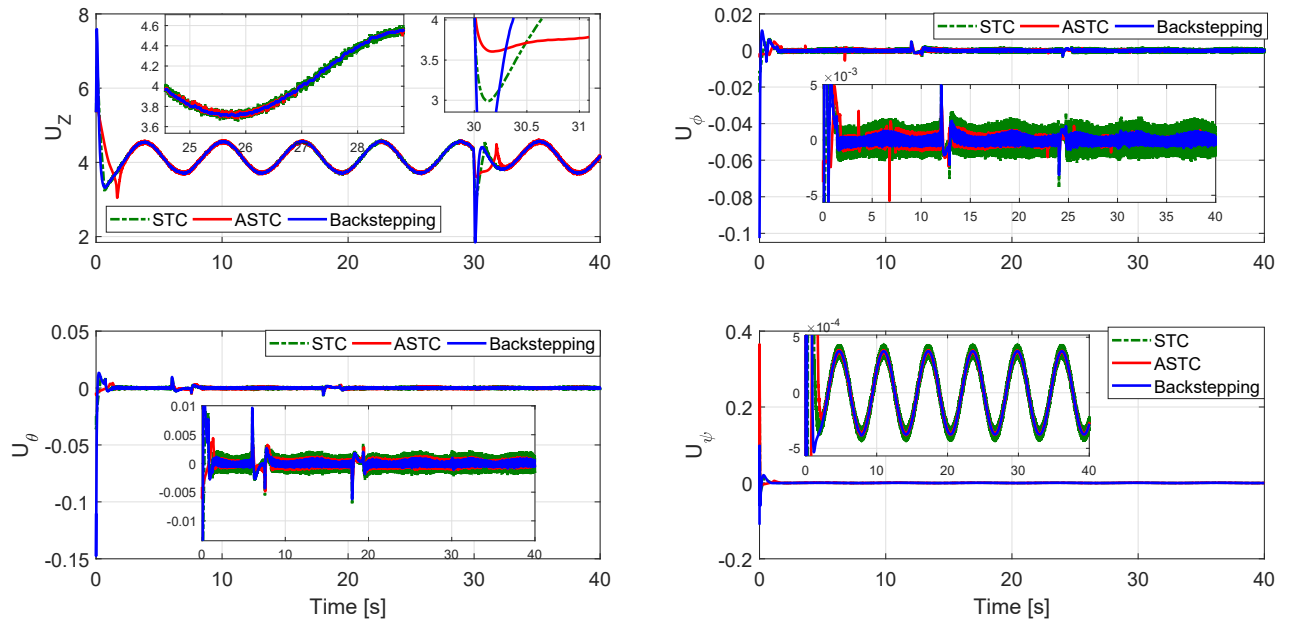


Figura 3.7: Entradas de control.

Nótese que en la señal del control de altitud U_z , en el intervalo de 25 s a 29 s, el chattering se desvanece hasta el punto de ser menor que el par generado por el controlador backstepping. Sin embargo, debido al cambio del set-point, el controlador requiere de una ganancia mayor para lograr el seguimiento de la trayectoria. Por otro lado, en la respuesta del controlador de alabeo se presenta una reducción de chattering significativa por parte del ASTC a partir del intervalo de 18 s a 40 s en comparación a los otros controladores. En la señal del control de guiñada, el comportamiento es similar en los tres casos. Adicionalmente, el chattering del control AST tiene una

magnitud muy cercana al backstepping.

Para evaluar el desempeño de cada controlador (ver Figura 3.8), se propone un índice de desempeño basado en los valores RMS. Se observa una mejora significativa en el desempeño de las entradas de control de los movimientos de orientación del cuadrirrotor

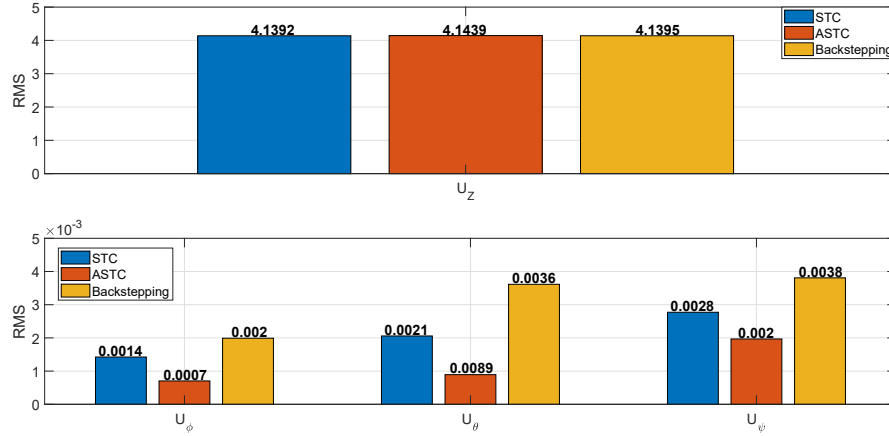


Figura 3.8: Valores RMS de las entradas de control.

La Figura 3.8 y 3.9 muestran la evolución de la variable deslizante de ambos controladores super twisting, donde se aprecia similitud entre ambas variables deslizantes tanto en magnitud como en chattering.

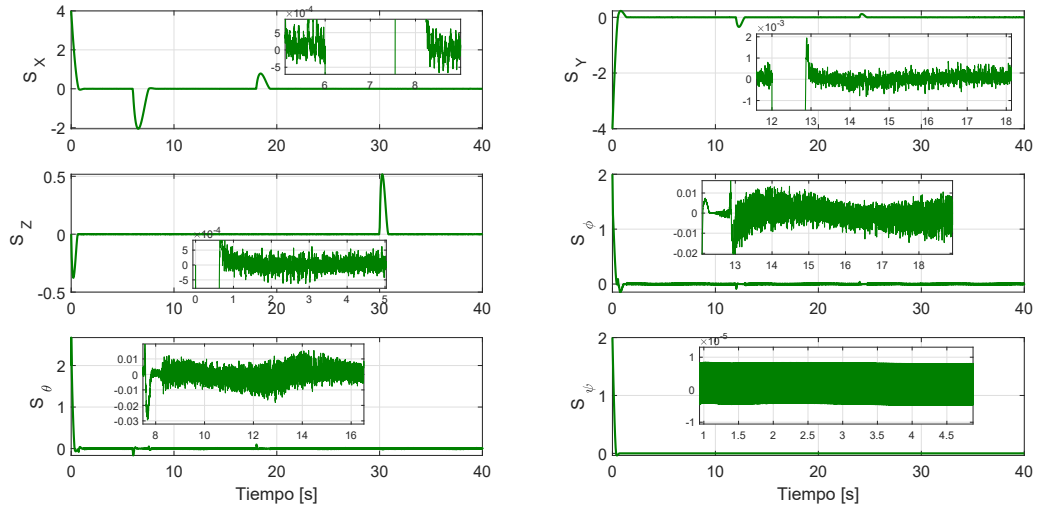


Figura 3.9: Evolución de la variable deslizante (Control super twisting).

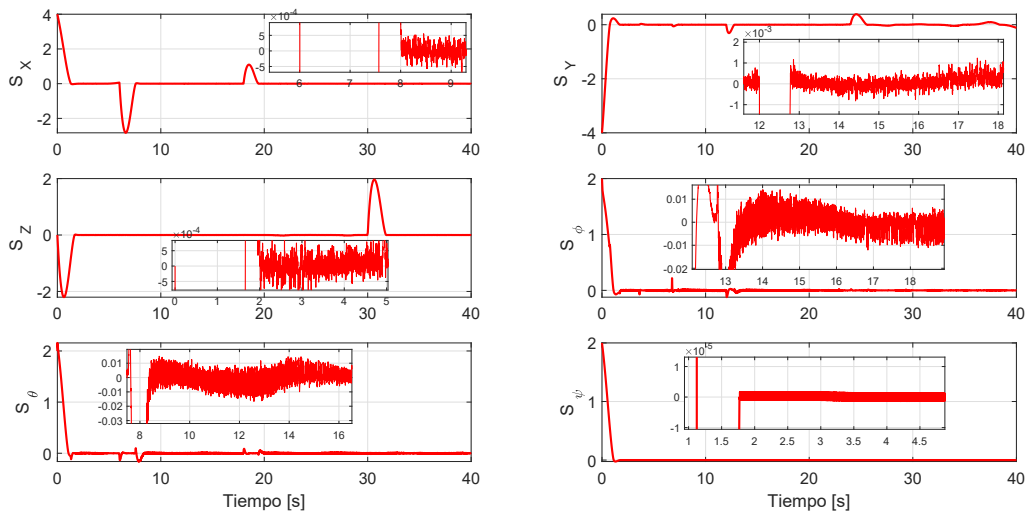


Figura 3.10: Evolución de la variable deslizante (Control super twisting adaptativo).

Nótese que la convergencia de la variable deslizante del controlador super twisting tradicional es mas rápida que la del controlador ST adaptativo. Esto puede deberse a la condición inicial de las ganancias adaptativas $L_i(t)$, ver Figura 3.6.

3.9. Conclusiones

En el presente capítulo se estableció una estrategia de control para el seguimiento/estabilización de los seis grados de libertad del cuádrirrotor. Se abordó el diseño de controladores robustos no lineales basado en las técnicas **backstepping** y **modos deslizantes super twisting** clásico y adaptativo. Dichos controladores fueron aplicados al modelo matemático del cuádrirrotor con la finalidad de evaluar el desempeño y la robustez en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Utilizando funciones de Lyapunov, se obtuvieron condiciones de suficiencia para garantizar la estabilidad de los cuatro rotores del cuádrirrotor y la convergencia en tiempo finito del error de seguimiento. Adicionalmente, se presentó una metodología de sintonización de las ganancias del algoritmo super twisting, donde el controlador solamente dependerá de la ganancia L en el algoritmo clásico mientras que el algoritmo adaptativo dependerá de la ganancia $L(t)$, la cual varía en el tiempo y ajustada por la ley de adaptación (3.6.14). Finalmente, se presentaron

resultados vía simulación numérica donde se obtuvieron los siguientes resultados:

- Se observó una convergencia más rápida hacia la trayectoria desempeñada por el algoritmo backstepping. Sin embargo, en presencia de perturbaciones y/o incertidumbres, el control basado en la técnica backstepping presenta dificultades para eliminar el error de posición en estado estable.
- Analizando la respuesta de las entradas de control del cuadrirrotor, se observa una reducción del chattering significativa por parte del ASTC, siendo su magnitud similar a la del control backstepping en estado estable.
- En relación al consumo de energía, los valores RMS del ASTC fueron más bajos en el control de orientación, siendo casi tres veces menor en el alabeo y el cabeceo en comparación con el controlador backstepping y dos veces en comparación con el STC. Con respecto al control de altitud, se observan valores similares para los tres controladores, teniendo picos más drásticos el algoritmo backstepping durante los transitorios transitorio.
- La respuesta del algoritmo backstepping ante el cambio en la referencia es más rápida, siendo la más lenta la respuesta del algoritmo ASTC. El costo de esta rapidez se ve directamente reflejado en las leyes de control. Sin embargo, esto no influye en la rapidez de convergencia.

Por otro lado, debido a que en la práctica algunas variables de estado pueden no estar disponibles para su medición o están corrompidas por ruido (en el caso particular las velocidades), en el siguiente capítulo se aborda el diseño de observadores de estado para dar solución a este problema.

Capítulo 4

Diseño de observadores no lineales para el cuadirrotor

En este capítulo se introducen técnicas de diseño de observadores de estado no lineales para reconstruir los estados no medibles del cuadirrotor. Los observadores basados en modos deslizantes han demostrado ser lo suficientemente robustos ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Adicionalmente, el error de estimación converge a cero en tiempo finito, mientras que los estados estimados convergen asintóticamente hacia los estados del sistema. Además, estos pueden reconstruir las perturbaciones que entran al sistema [44]. Sin embargo, la principal desventaja de los modos deslizantes es el fenómeno denominado *chattering*, producido por los términos discontinuos presentes en el diseño del observador.

Se han realizado esfuerzos por reducir este fenómeno, se han propuesto técnicas de diseño basadas en modos deslizantes de alto orden. Los modos deslizantes de alto orden brindan herramientas efectivas con las que es posible atenuar el *chattering* sin comprometer los beneficios que brindan los modos deslizantes tradicionales. En la literatura, los observadores por modos deslizantes mas populares han sido el observador super twisting (STO) y el observador por modos deslizantes de alto orden (HOSMO).

Con el objetivo de diseñar un observador de estados para el cuadirrotor, las hipótesis **Hipóte-**

sis 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 y 3.6 introducidas en capítulo 3. Además, se introduce la siguiente hipótesis

Hipotesis 4.1 Las posiciones lineales y angulares del cuadrirrotor son medibles. Mientras que las velocidades lineales y angulares no están disponibles.

Por lo tanto, el objetivo del observador es reconstruir las velocidades lineales y angulares del cuadrirrotor.

4.1. Observador super twisting

El diseño del observador super twisting considera un sistema no lineal incierto de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

donde $X = (x_1, x_2^T) \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, u es la entrada de control, y es la salida del sistema. $f(x)$ y $g(x)$ son términos no lineales conocidos y δ denota las perturbaciones e incertidumbres del sistema. Observe que el sistema (4.1.1) pertenece a la clase de sistemas no lineales en la forma triangular [45]

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x, u, \delta).$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, u, \delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) + g(x)u + \delta \end{pmatrix}.$$

Ahora, se introducen las siguientes hipótesis

Hipótesis 4.1.1 La función $\Phi(x, u, \delta)$ es Lipschitz continua con respecto a x y uniforme con respecto a u , es decir, existe una constante positiva Θ , tal que $\|\Phi(x, u)\| \leq \Theta\|x\|$.

Hipótesis 4.1.2 La perturbación δ es acotada, es decir, existe una constante positiva constante ϱ_1 tal que $|\delta| \leq \varrho_1$.

Entonces, el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1 |\dot{\hat{e}}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{\hat{e}}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + K_2 \text{sign}(\hat{e}_1)\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

es un observador super twisting (STO), donde $\hat{e}_j = x_j - \hat{x}_j$, $j = 1, 2$ y $K_1 > 0, K_2 > 0$ denotan las ganancias del observador. Además, las dinámicas del error de estimación pueden quedar expresadas como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 - K_1 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u + \delta - K_2 \text{sign}(\hat{e}_1)\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

donde $\tilde{f} = f(x) - f(\hat{x})$ y $\tilde{g} = g(x) - g(\hat{x})$.

Ahora, se considera que las **Hipótesis 4.1.1** e **Hipótesis 4.1.2** se satisfacen. De este modo se puede concluir que los errores de estimación \hat{e}_1, \hat{e}_2 convergerán a cero en tiempo finito $t > T_1$ si seleccionamos las ganancias K_1 y K_2 lo suficientemente grandes. Ahora, se propone la siguiente metodología para la sintonización de ganancias

$$K_1 = 2Lo, \quad K_2 = \frac{Lo^2}{2}$$

donde la ganancia del observador únicamente dependerá del termino $Lo > 0$, seleccionado suficientemente grande. Entonces, con el objetivo de demostrar convergencia en tiempo finito del error de estimación, se considera el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= |\hat{e}_1| \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \varsigma_2 &= \hat{e}_2\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

Las dinámicas del error de estimación (4.1.3), en las nuevas coordenadas, quedan expresadas por

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1 &= \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \left(-2Lo|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} + \hat{e}_2 \right) \\ \dot{\varsigma}_2 &= \tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x}) + \delta - \frac{Lo^2}{2} \text{sign}(\hat{e}_2)\end{aligned}\quad (4.1.5)$$

o pueden ser representadas de una forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}_1 \\ \dot{\varsigma}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} -2Lo & 1 \\ Lo^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(x, \hat{e}) + \tilde{g}(x, \hat{x}) + \delta \end{bmatrix} \right) \quad (4.1.6)$$

Entonces, el sistema anterior puede ser representado en una forma compacta

$$\dot{\varsigma} = \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \left[(A - S_{\varsigma}^{-1} C^T C) \varsigma + \Phi \right] \quad (4.1.7)$$

con

$$\begin{aligned}\varsigma &= \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \Phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x}) + \delta \end{bmatrix} \\ S_{\varsigma} C^T C &= \begin{bmatrix} -2Lo & 0 \\ -Lo^2 & 0 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde $S_{\varsigma}^{-1} C^T$ corresponde a la ganancia del observador. Además, la matriz S_{ς} es simétrica definida positiva, solución de la siguiente ecuación algebraica de Lyapunov

$$LoS_{\varsigma} + A^T S_{\varsigma} + S_{\varsigma} A - C^T C = 0 \quad (4.1.8)$$

Entonces, para analizar la convergencia en tiempo finito del error de estimación (4.1.7), se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varsigma) = \varsigma^T S_{\varsigma} \varsigma \quad (4.1.9)$$

la cual es cuadrática en las nuevas coordenadas. Ahora, tomando la derivada con respecto al tiempo de (4.9) a lo largo de las trayectorias de (4.1.7), obtenemos

$$\dot{V}(\zeta) \leq \frac{1}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} (-Lo\zeta^T S_\zeta \zeta + 2\zeta^T S_\zeta \Phi) \quad (4.1.10)$$

Ahora, tomando la norma del termino no lineal $2\zeta^T S_\zeta \Phi$ y de la **Hipótesis 4.1.1**, i.e $\|\Phi\| \leq \Theta$, para $\Theta > 0$, resulta

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\frac{Lo}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} V(\zeta) + \frac{1}{|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} \|S_\zeta\| \|\Theta\| \|\zeta\|^2 \quad (4.1.11)$$

Además, la ecuación (4.9) satisface las siguientes desigualdades

$$\lambda_{min}(S_\zeta) \|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{max}(S_\zeta) \|\zeta\|^2 \quad (4.1.12)$$

donde λ_{min} y λ_{max} son valores propios mínimos y máximos de la matriz S_ζ , respectivamente.

Entonces, resulta que

$$\dot{V}(\zeta) \leq \frac{Lo - \sigma_c}{2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}}} V(\zeta) \quad (4.1.13)$$

con $\sigma_c = \frac{2\|S_\zeta\|\Theta}{\lambda_{max}(S_\zeta)}$. Considerando que la siguiente desigualdad

$$|\hat{e}_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{V(\zeta)}{\lambda_{max}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.14)$$

es satisfecha, entonces

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\mu V(\zeta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.15)$$

donde $\mu = \frac{(Lo - \sigma_c)\lambda_{max}(S_\zeta)}{2}$. Seleccionando Lo lo suficientemente grande, tal que la siguiente desigualdad

$$Lo > \sigma_c = \frac{\|S_\zeta\|\Theta}{\lambda_{max}(S_\zeta)} \quad (4.1.16)$$

se satisface, entonces, \dot{V} es una función definida negativa.

Considerando la ecuación (4.1.15), es posible calcular el tiempo de convergencia. Entonces, re-

solviendo la ecuación diferencia obtenemos

$$2V(T)^{\frac{1}{2}} = 2V(0)^{\frac{1}{2}} - \mu T = 0 \quad (4.1.17)$$

Entonces, como resultado, el estado ς converge hacia cero en tiempo finito T , y alcanzará la convergencia en el tiempo dado por

$$T = \frac{2V(0)^{\frac{1}{2}}}{\mu} \quad (4.1.18)$$

lo cual implica que los errores de estimación \dot{e}_1 y \dot{e}_2 convergerán a cero en tiempo finito, garantizando la convergencia asintótica de los estados estimados hacia los estados del sistema.

4.2. Diseño del STO para el cuadirrotor

Con el objetivo de diseñar un observador de estados para el cuadirrotor, se consideran las dinámicas del cuadirrotor descritas en la ec. (3.1.6) del capítulo 3. La aplicación del observador super twisting al modelo del cuadirrotor será ilustrado de forma muy general en esta sección.

Por lo tanto, se consideran las dinámicas del cuadirrotor, representadas en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi. \\ \dot{x}_{2,i} &= f_i(x) + g_i(x)u_i + \delta_i, \\ y_i &= Cx_i = x_{1,i}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

con

$$\begin{aligned} f_X &= 0, & f_Y &= 0, & f_Z &= -g, \\ f_\phi &= -I_\phi x_{2,\theta} x_{2,\psi}, & f_\theta &= -I_\theta x_{2,\phi} x_{2,\psi}, & f_\psi &= -I_\psi x_{2,\phi} x_{2,\theta}, \\ g_X &= \frac{\sin(x_{1,\theta})}{m}, & g_Y &= \frac{\sin(x_{1,\phi})}{m}, & g_Z &= \frac{(C_{x_{1,\theta}} C_{x_{1,\phi}})}{m}, \\ g_\phi &= I_{xx}^{-1}, & g_\theta &= I_{yy}^{-1}, & g_\psi &= I_{zz}^{-1}, \\ I_\phi &= \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}, & I_\theta &= \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}, & I_\psi &= \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}}. \end{aligned}$$

donde $X = (x_{1,i}, x_{2,i})^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida de control δ_i denota las perturbaciones e incertidumbres que entran al sistema. $f(x)$ y $g(x)$ son términos no lineales conocidos.

El objetivo del observador de estados es reconstruir el estado desconocido del sistema (velocidades), en este caso, los estados $x_{2,i}, i = X, Y, Z, \phi, \theta, \psi$ que representan a las velocidades lineales y angulares. Entonces, se define el error de estimación

$$\hat{e}_{1,i} = x_{1,i} - \hat{x}_{1,i} \quad (4.2.2)$$

Entonces, el observador super twisting resultante, aplicado a cada uno de los subsistemas del cuadrirrotor resulta

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1,i} &= \hat{x}_{2,i} + 2Lo_i |\hat{e}_{1,i}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{e}_{1,i}) \\ \dot{\hat{x}}_{2,i} &= f_i(\hat{x}) + g_i(\hat{x})u_i + \frac{Lo_i}{2} \text{sign}(\hat{e}_{1,i}) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Entonces, el observador resultante para los movimientos de translación es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,X} \\ \hat{x}_{2,X} \\ \hat{x}_{1,Y} \\ \hat{x}_{2,Y} \\ \hat{x}_{1,Z} \\ \hat{x}_{2,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,X} + 2Lo_X |x_{1,X} - \hat{x}_{1,X}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,X} - \hat{x}_{1,X}) \\ \frac{\sin(\hat{x}_{1,\theta})}{m} u_Z + \frac{Lo_X^2}{2} \text{sign}(x_{1,X} - \hat{x}_{1,X}) \\ \hat{x}_{2,Y} + 2Lo_Y |x_{1,Y} - \hat{x}_{1,Y}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,Y} - \hat{x}_{1,Y}) \\ \frac{\sin(\hat{x}_{1,\phi})}{m} u_Z + \frac{Lo_Y^2}{2} \text{sign}(x_{1,Y} - \hat{x}_{1,Y}) \\ \hat{x}_{2,Z} + 2Lo_Z |x_{1,Z} - \hat{x}_{1,Z}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,Z} - \hat{x}_{1,Z}) \\ -g + \frac{\cos(\hat{x}_{1,\theta})\cos(\hat{x}_{1,\phi})}{m} u_Z + \frac{Lo_Z^2}{2} \text{sign}(x_{1,Z} - \hat{x}_{1,Z}) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

mientras que el observador para reconstruir las velocidades angulares, está dado por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,\phi} \\ \hat{x}_{2,\phi} \\ \hat{x}_{1,\theta} \\ \hat{x}_{2,\theta} \\ \hat{x}_{1,\psi} \\ \hat{x}_{2,\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,\phi} + 2Lo_\phi |x_{1,\phi} - \hat{x}_{1,\phi}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,\phi} - \hat{x}_{1,\phi}) \\ -I_\phi \hat{x}_{2,\theta} \hat{x}_{2,\psi} + \frac{u_\phi}{I_{xx}} + \frac{Lo_\phi^2}{2} \text{sign}(x_{1,\phi} - \hat{x}_{1,\phi}) \\ \hat{x}_{2,\theta} + 2Lo_\theta |x_{1,\theta} - \hat{x}_{1,\theta}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,\theta} - \hat{x}_{1,\theta}) \\ -I_\theta \hat{x}_{2,\phi} \hat{x}_{2,\psi} + \frac{u_\theta}{I_{yy}} + \frac{Lo_\theta^2}{2} \text{sign}(x_{1,\theta} - \hat{x}_{1,\theta}) \\ \hat{x}_{2,\psi} + 2Lo_\psi |x_{1,\psi} - \hat{x}_{1,\psi}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_{1,\psi} - \hat{x}_{1,\psi}) \\ -I_\psi \hat{x}_{2,\phi} \hat{x}_{2,\theta} + \frac{u_\psi}{I_{zz}} + \frac{Lo_\psi^2}{2} \text{sign}(x_{1,\psi} - \hat{x}_{1,\psi}) \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Tal observador, permitirá tener un conocimiento completo de los estados del sistema para el diseño de la superficie deslizante. Además, el principio de separación para este observador será ilustrado en el capítulo 5.

4.3. Observador por modos deslizantes de alto orden

Considere un sistema no lineal incierto de orden dos, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= Cx = x_1 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde $X = (x_1, x_2^T) \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, u es la entrada de control, y es la salida del sistema, $C = (1, 0)$ es la matriz de salida. $f(x)$ y $g(x)$ son términos no lineales conocidos y δ denota las perturbaciones e incertidumbres del sistema. Las derivadas $\dot{x}_j, j = 1, \dots, n$ de las salidas medibles $y = x_1$ pueden ser estimadas en tiempo finito por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1 |\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + f(\hat{x}) + g(\hat{x})u \\ \dot{\hat{x}}_3 &= K_3 \text{sign}(\hat{e}_1) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

el cual es un observador por modos deslizantes de alto orden (HOSMO), donde $\hat{e}_j = x_j - \hat{x}_j$, $j = 1, 2, 3$. Además, las dinámicas del error de estimación pueden ser escritas como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= -K_1|\hat{e}_1|\text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_2 &= -K_2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) + \tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u \\ \dot{\hat{e}}_3 &= -K_3\text{sign}(\hat{e}_1) + \dot{\delta}\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

con δ Lipschitz y $|\dot{\delta}| \leq \varrho_1$.

Ahora, se propone una metodología para la sintonización de ganancias del observador, tal que

$$K_1 = 3Lo, \quad K_2 = 2Lo^2, \quad K_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Lo^3$$

donde $Lo > 0$ se selecciona lo suficientemente grande tal que los errores de estimación \hat{e}_1 , \hat{e}_2 , \hat{e}_3 converjan a cero en un tiempo finito $t > T$. Nótese que las ganancias del observador solamente dependen de Lo , lo cual simplifica la sintonización e implementación en la práctica.

Entonces, con el objetivo de demostrar la convergencia en tiempo finito del error de estimación, se introduce el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= |\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) \\ \varsigma_2 &= \hat{e}_2 \\ \varsigma_3 &= \frac{3}{2}\hat{e}_3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

El sistema (4.3.3), es expresado en las nuevas dinámicas de ς como

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1 &= \frac{2}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}}[-K_1\varsigma_1 + \varsigma_2] \\ \dot{\varsigma}_2 &= \frac{2}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}}\left[-\frac{3}{2}K_2\varsigma_1 + \varsigma_3\right] \\ \dot{\varsigma}_3 &= \frac{2}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}}\left[-\frac{3}{2}K_3\varsigma_1 + \frac{3}{2}|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}(\tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u + \dot{\delta}) + \frac{3}{4|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}}\varsigma_2(-K_1\varsigma_1 - \varsigma_2)\right]\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

El sistema (4.3.3) puede ser expresado en una forma equivalente como

$$\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}_1 \\ \dot{\varsigma}_2 \\ \dot{\varsigma}_3 \end{bmatrix} = \frac{2}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}} \left(\begin{bmatrix} -K_1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}K_2 & 0 & 1 \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^2 K_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}(\tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u + \delta) + \frac{3}{4|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}}\varsigma_2(-K_1\varsigma_1 - \varsigma_2) \end{bmatrix} \right) \quad (4.3.6)$$

o en la forma compacta como

$$\dot{\varsigma} = \frac{2}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}} [(A - S_\varsigma^{-1}C^T C)\varsigma + \Phi] \quad (4.3.7)$$

con

$$\begin{aligned} \varsigma &= \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_\varsigma^{-1}C^T C = \begin{bmatrix} -3Lo & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}Lo^2 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^2 Lo^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}(\tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u + \delta) + \frac{3}{4|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}}\varsigma_2(-K_1\varsigma_1 - \varsigma_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $S_\varsigma^{-1}C^T$ es la ganancia del observador. Además, S_ς es una matriz simétrica y definida positiva, solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$LoS_\varsigma + A^T S_\varsigma + S_\varsigma A - C^T C = 0 \quad (4.3.8)$$

Entonces, para el análisis de convergencia del error de estimación (4.3.7) en tiempo finito, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varsigma) = \varsigma^T S_\varsigma \varsigma \quad (4.3.9)$$

Tomando la primer derivada de $V(\zeta)$ con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias de (4.3.7), tenemos

$$\dot{V}(\zeta) \leq \frac{2}{3|\hat{e}_1|} (-LoV_\zeta + 2\zeta^T S_\zeta \Phi) \quad (4.3.10)$$

Ahora, tomando la norma del termino no lineal $2\zeta^T S_\zeta \Phi$ y de la **Hipótesis 4.1.1**, es decir, $\|\varphi\| \leq \Theta\|\zeta\|$, para $\Theta > 0$, resulta

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\frac{2Lo}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}} V(\zeta) + \frac{4}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}} \|S_\zeta\| \Theta \|\zeta\|^2 \quad (4.3.11)$$

Además, la función $V(\zeta)$ satisface la norma de equivalencia

$$\lambda_{min}(S_\zeta) \|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{max}(S_\zeta) \|\zeta\|^2 \quad (4.3.12)$$

donde $\lambda_{min}(S_\zeta)$ y $\lambda_{max}(S_\zeta)$ son valores propios mínimos y máximos de la matriz S_ζ , respectivamente. Entonces, resulta que

$$\dot{V}(\zeta) \leq \frac{2(Lo - \sigma_c)}{3|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}} V(\zeta) \quad (4.3.13)$$

donde $\sigma_c = \frac{2\|S_\zeta\|\Theta}{3\lambda_{max}}$.

Considerando que la desigualdad

$$|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \leq \|\zeta\|^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{V(\zeta)}{\lambda_{max}(S_\zeta)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.3.14)$$

se satisface, entonces, resulta que

$$\dot{V}(\zeta) \leq -\mu V(\zeta)^{\frac{1}{3}} \quad (4.3.15)$$

donde $\mu = \frac{2(Lo - \sigma_c)\lambda_{max}(S_\zeta)}{3}$.

Entonces, seleccionando $Lo > 0$ lo suficientemente grande, tal que la siguiente desigualdad

$$Lo > \sigma_c = \frac{2\|S_\zeta\|\Theta}{3\lambda_{max}(S_\zeta)} \quad (4.3.16)$$

se satisface, resulta que $\dot{V}(\zeta)$ es una función definida negativa. Esto demuestra que las trayectorias del sistema convergen a cero en tiempo finito. Para calcular el tiempo de convergencia, se

considera la ec. (4.3.15). Entonces, resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos

$$3V^{\frac{1}{3}}(T) = 3V^{\frac{1}{3}} - \mu T = 0 \quad (4.3.17)$$

Por lo tanto, el error de estimación ζ convergerá a cero en tiempo finito T , y alcanzará la convergencia en el tiempo dado por

$$T = \frac{3V(0)^{\frac{1}{3}}}{\mu} \quad (4.3.18)$$

Esto implica que los errores de estimación $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ alcanzarán la convergencia en tiempo finito, garantizando la convergencia de los estados estimados hacia los estados del sistema.

4.4. Diseño del HOSMO para el cuadirrotor

En esta sección se ilustrará el diseño de un observador por modos deslizantes de alto orden para el cuadirrotor, con el objetivo de reconstruir los estados no disponibles (velocidades): $x_{2,i}$, $i = x, y, z, \phi, \theta, \psi$; a partir de la salida medible (posiciones).

Entonces, se considera el modelo dinámico del cuadirrotor representado como un conjunto de subsistemas, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,i} &= x_{2,i}, & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi. \\ \dot{x}_{2,i} &= f_i(x) + g_i(x)u_i + \delta_i, \\ y_i &= CX_i = x_{1,i}. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

con

$$\begin{aligned}
 f_X &= 0, & f_Y &= 0, & f_Z &= -g, \\
 f_\phi &=, & f_\theta &= -I_\theta x_{2,\phi} x_{2,\psi}, & f_\psi &= -I_\psi x_{2,\phi} x_{2,\theta}, \\
 g_X &= \frac{\sin(x_{1,\theta})}{m}, & g_Y &= \frac{\sin(x_{1,\phi})}{m}, & g_Z &= \frac{(C_{x_{1,\theta}} C_{x_{1,\phi}})}{m}, \\
 g_\phi &= I_{xx}^{-1}, & g_\theta &= I_{yy}^{-1}, & g_\psi &= I_{zz}^{-1}, \\
 I_\phi &= \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}, & I_\theta &= \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}, & I_\psi &= \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}}.
 \end{aligned}$$

donde $X = (x_{1,i}, x_{2,i})^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida de control, $C = (1, 0)$ es la matriz de salida, δ_i denota las perturbaciones e incertidumbres que entran al sistema. $f(x)$ y $g(x)$ son términos no lineales conocidos.

Ahora, aplicando el siguiente observador

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_{1,i} &= \hat{x}_{2,i} + K_{1,i} |\hat{e}_{1,i}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,i}), & i &= x, y, z, \phi, \theta, \psi \\
 \dot{\hat{x}}_{2,i} &= \hat{x}_{3,i} + K_{2,i} |\hat{e}_{1,i}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,i}) + f_i(\hat{x}) + g_i(\hat{x}) u_i \\
 \dot{\hat{x}}_{3,i} &= K_{3,i} \text{sign}(\hat{e}_{1,i})
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

el cual es un observador por modos deslizantes de alto orden, es posible estimar las velocidades lineales y angulares a partir del conocimiento de las posiciones lineales y angulares del cuadrirrotor. El término \hat{e}_1 corresponde al error de estimación, el cual es expresado por

$$\hat{e}_{1,i} = x_{1,i} - \hat{x}_{1,i} \tag{4.4.3}$$

Entonces, considerando que se satisface la condición $\theta = \theta_{ref}$ y $\phi = \phi_{ref}$, de la ec. (3.1.3), se tiene que el observador de estados que será aplicado al cada una de las dinámicas de translación es el siguiente

Movimiento sobre el eje X

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,X} \\ \dot{\hat{x}}_{2,X} \\ \dot{\hat{x}}_{3,X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,X} + K_{1,X} |\hat{e}_{1,X}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,X}) \\ \hat{x}_{3,X} + K_{2,X} |\hat{e}_{1,X}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,X}) + u_Y \\ K_{3,X} \text{sign}(\hat{e}_{1,X}) \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Movimiento sobre el eje Y

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,Y} \\ \dot{\hat{x}}_{2,Y} \\ \dot{\hat{x}}_{3,Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,Y} + K_{1,Y} |\hat{e}_{1,Y}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,Y}) \\ \hat{x}_{3,Y} + K_{2,Y} |\hat{e}_{1,Y}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,Y}) + u_Y \\ K_{3,Y} \text{sign}(\hat{e}_{1,Y}) \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

Movimiento sobre el eje Z

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,Z} \\ \dot{\hat{x}}_{2,Z} \\ \dot{\hat{x}}_{3,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,Z} + K_{1,Z} |\hat{e}_{1,Z}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,Z}) \\ \hat{x}_{3,Z} + K_{2,Z} |\hat{e}_{1,Z}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,Z}) - g + \frac{\cos(\hat{x}_{2,\phi}) \cos(\hat{x}_{2,\theta})}{m} u_Z \\ K_{3,Z} \text{sign}(\hat{e}_{1,Z}) \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

Por otro lado, el observador que será de utilidad para estimar las velocidades angulares del cuadrirrotor es el siguiente

Alabeo, ϕ

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,\phi} \\ \dot{\hat{x}}_{2,\phi} \\ \dot{\hat{x}}_{3,\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,\phi} + K_{1,\phi} |\hat{e}_{1,\phi}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\phi}) \\ \hat{x}_{3,\phi} + K_{2,\phi} |\hat{e}_{1,\phi}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\phi}) - I_\phi \hat{x}_{2,\theta} \hat{x}_{2,\psi} + I_{xx}^{-1} u_\phi \\ K_{3,\phi} \text{sign}(\hat{e}_{1,\phi}) \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Cabeceo, θ

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,\theta} \\ \dot{\hat{x}}_{2,\theta} \\ \dot{\hat{x}}_{3,\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,\theta} + K_{1,\theta} |\hat{e}_{1,\theta}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\theta}) \\ \hat{x}_{3,\theta} + K_{2,\theta} |\hat{e}_{1,\theta}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\theta}) - I_\theta \hat{x}_{2,\phi} \hat{x}_{2,\psi} + I_{yy}^{-1} u_\theta \\ K_{3,\theta} \text{sign}(\hat{e}_{1,\theta}) \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

Guiñada, ψ

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{1,\psi} \\ \dot{\hat{x}}_{2,\psi} \\ \dot{\hat{x}}_{3,\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,\psi} + K_{1,\psi} |\hat{e}_{1,\psi}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\psi}) \\ \hat{x}_{3,\psi} + K_{2,\psi} |\hat{e}_{1,\psi}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_{1,\psi}) - I_{\psi} \hat{x}_{2,\phi} \hat{x}_{2,\theta} + I_{zz}^{-1} u_{\psi} \\ K_{3,\psi} \text{sign}(\hat{e}_{1,\psi}) \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

Por lo tanto, el observador de (4.4.4)-(4.4.9) garantiza que los errores de estimación $\hat{e}_{j,i}$ con $i = x, y, z, \phi, \theta, \psi$; $j = 1, 2, 3$ convergen en tiempo finito, si el parámetro Lo_i es seleccionado lo suficientemente grande. Además, el observador reconstruye las velocidades lineales y angulares del cuadirrotor, lo cual permite un conocimiento completo del estado, requerido para el diseño de la variable deslizante. Adicionalmente, el tercer estado del observador de alto orden, permite estimar la magnitud de las perturbaciones incertidumbres δ_i que entran al sistema.

4.5. Resultados

El desempeño de los observadores de estado propuestos es evaluado por medio de simulación numérica via MATLAB/Simulink. Se establecen condiciones iniciales para el modelo del cuadirrotor y para el observador de estados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [x(0), y(0), z(0), \phi(0), \theta(0), \psi(0)] &= [1, -1, 0, 0.5, 0.5, 0.5] \\ [\hat{x}(0), \hat{y}(0), \hat{z}(0), \hat{\phi}(0), \hat{\theta}(0), \hat{\psi}(0)] &= [2, 1, 1, 0, 2, -1] \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Con el objetivo de validar la convergencia en tiempo finito de los errores de estimación, se propone una trayectoria sujeta a diferentes cambios en la referencia. La referencia es obtenida por medio de funciones escalón multiplicadas por una función de transferencia $\frac{1}{s+1}$, variando en ambas direcciones de los ejes XYZ (ver Figura 4.1). Los observadores de estado son evaluados en lazo abierto, con el propósito de analizar las ventajas y desventajas de dichos observadores. Además, para evaluar la robustez y la precisión de los observadores, el modelo matemático del cuadirrotor es afectado por ruido blanco con una desviación estándar de 0.001 en la medición del sensor de posición, exceptuando al ángulo θ . Adicionalmente, las siguientes perturbaciones son introduci-

das al sistema

$$\delta_X = \sin(t), \quad \delta_Y = \cos(t), \quad \delta_Z = \sin(t), \quad \delta_\phi = 0.5\cos(0.5t), \quad \delta_\psi = 0.5\sin(t)\cos(0.5t).$$

Notese que no se introducen perturbaciones ni ruido blanco al movimiento de cabeceo. Esto, con el motivo de ilustrar el comportamiento de los observadores propuestos en ausencia de perturbaciones. La tabla 4.1 contiene los valores de las ganancias para la sintonización de los observadores de estado.

Ganancia	STO						HOSMO					
	x	y	z	ϕ	θ	ψ	x	y	z	ϕ	θ	ψ
<i>Lo</i>	1.6	2	3	2	2	3	2	3	2.5	2.5	2.7	2

Tabla 4.1: Ganancias para la estimación de estados.

Los resultados de las simulaciones son ilustrados a continuación

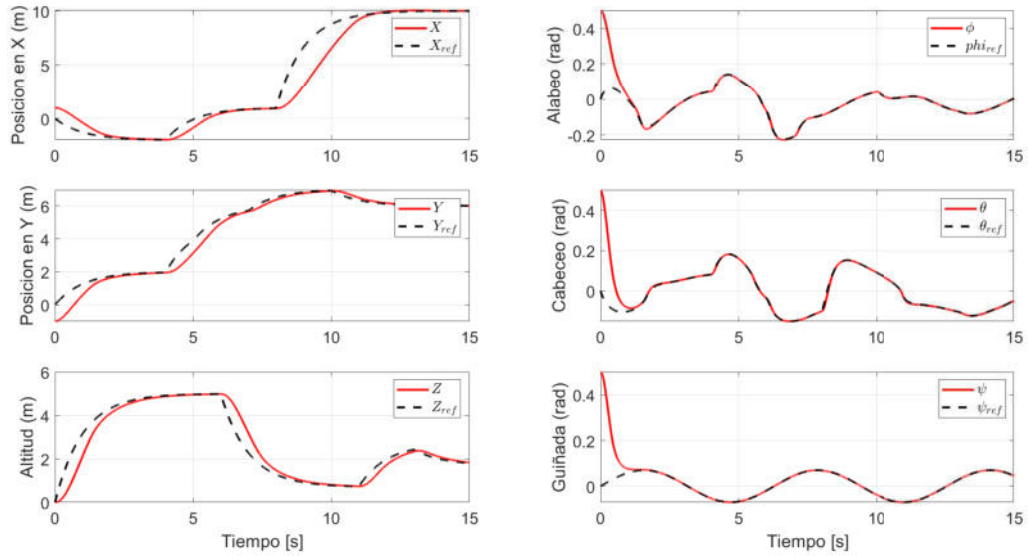


Figura 4.1: Seguimiento de trayectorias del cuadrirotor.

Las Figuras 4.2 y 4.3 muestran los resultados obtenidos de la estimación de las velocidades lineales del cuadrirotor por medio del observador super twisting y el observador por modos deslizantes de alto orden, respectivamente. Ambos observadores convergen asintóticamente a los estados del sistema, lo cual demuestra que el error de estimación converge a cero.

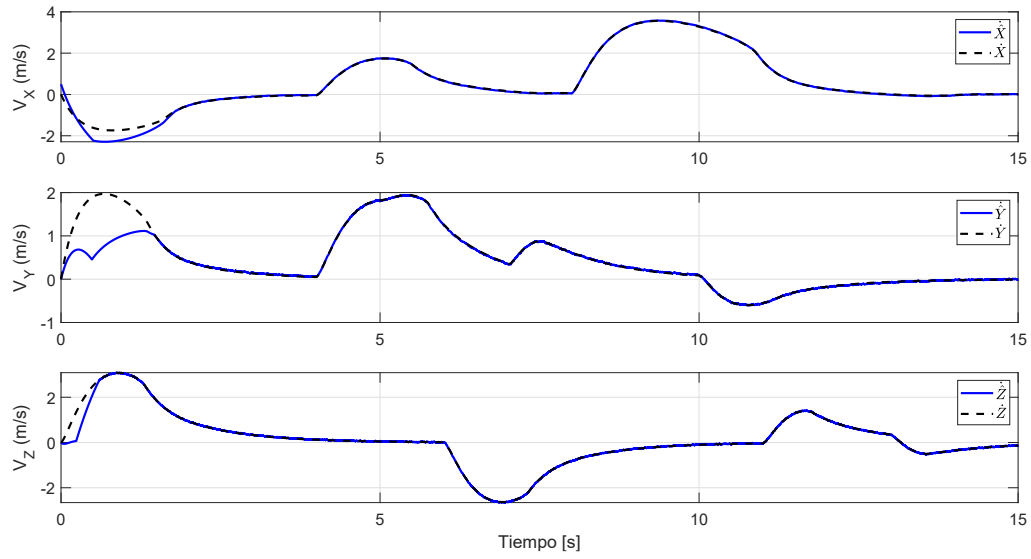


Figura 4.2: Observador super twisting: Estimación de las velocidades lineales.

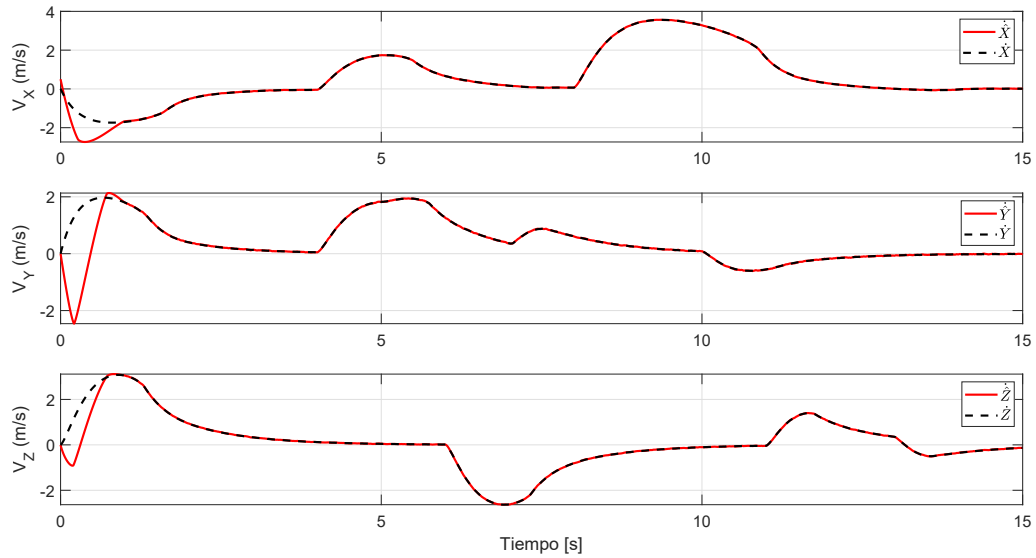


Figura 4.3: Observador por modos deslizantes de alto orden: Estimación de las velocidades lineales.

Nótese que la respuesta del observador de alto orden, cuando parte de las condiciones iniciales dadas, estima al las velocidades lineales, generando una velocidad en sentido negativo. Sin embargo, esto es corregido y, por lo tanto, converge hacia los estados del sistema. La Figura 4.4 y

4.5, ilustran la convergencia de los estados estimados hacia los estados del sistema, por medio del observador ST y el observador por modos deslizantes de alto orden, respectivamente .

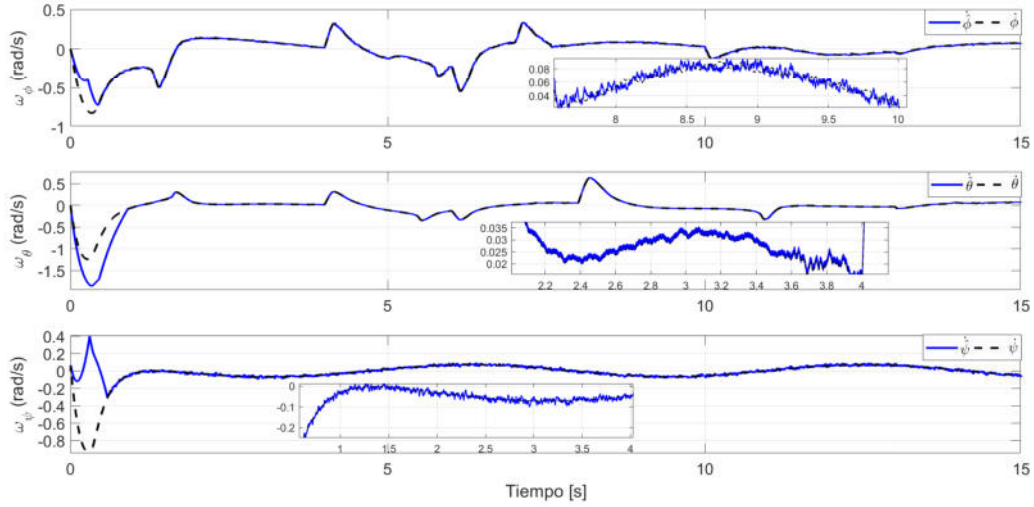


Figura 4.4: Observador super twisting: Estimación de las velocidades angulares.

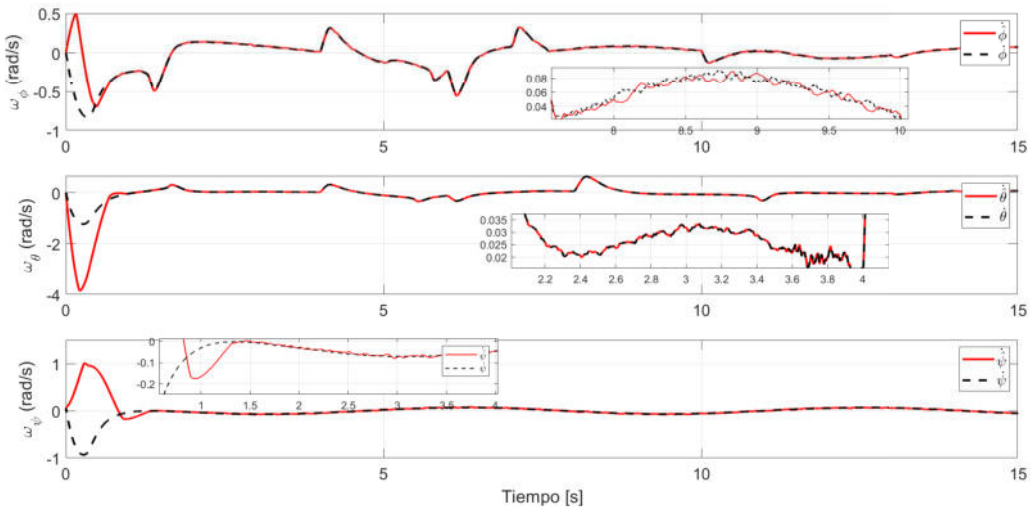


Figura 4.5: Observador por modos deslizantes de alto orden: Estimación de las velocidades angulares.

Es posible observar que las velocidades angulares estimadas con el HOSMO contienen un ruido menor que las estimadas por el STO. La Figura 4.6 y 4.7 muestran la estimación de las perturbaciones aditivas y el ruido que fueron introducidos al sistema.

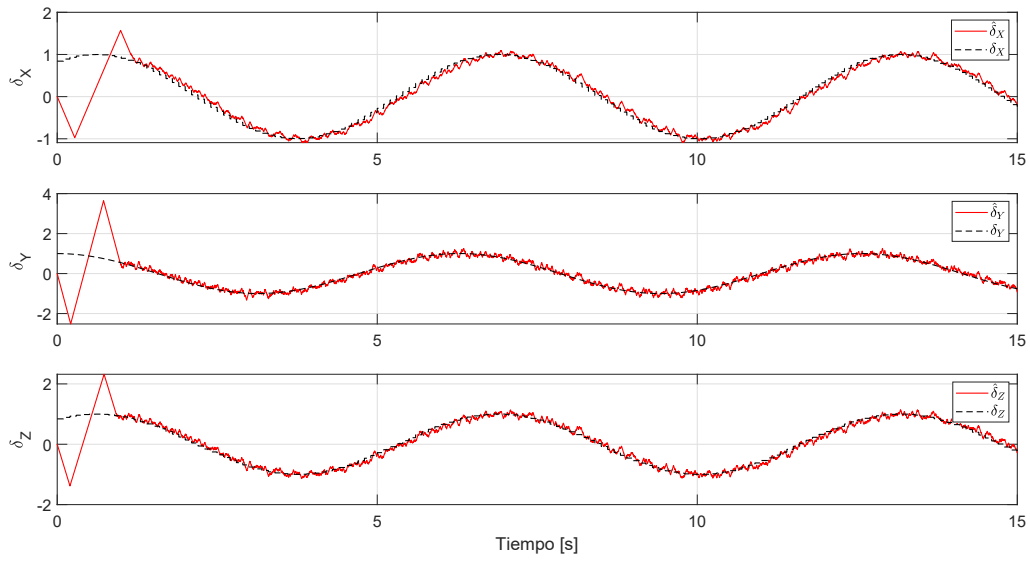


Figura 4.6: Reconstrucción de las perturbaciones entrantes a las dinámicas de posición.

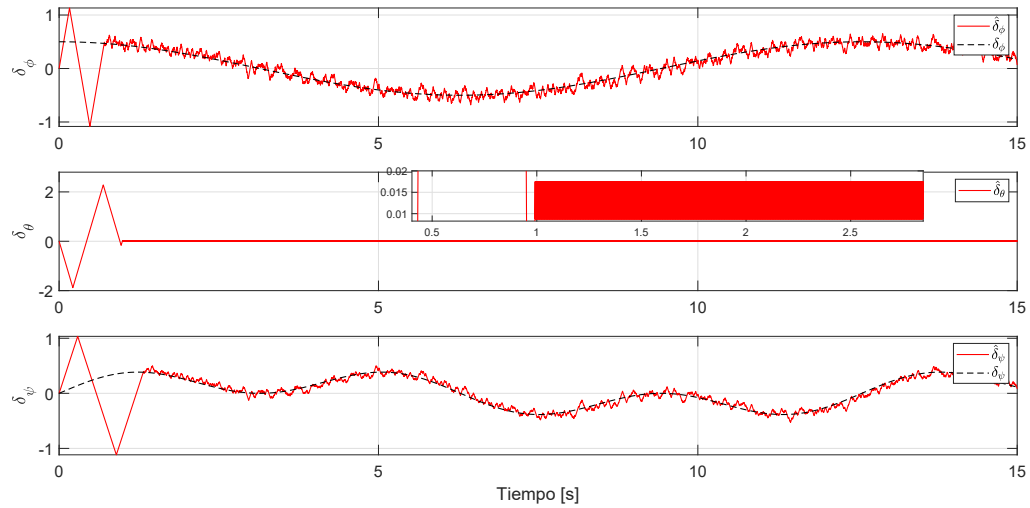


Figura 4.7: Reconstrucción de las perturbaciones entrantes a las dinámicas de orientación.

La respuesta de δ_ϕ es generada por la función discontinua $sign(\hat{e}_1)$ en el estado $\dot{\hat{x}}_3$ del observador de alto orden, lo cual indica que es el chattering inherente de los modos deslizantes.

4.6. Conclusiones

En este capítulo se presentaron estrategias de diseño de observadores de estado no lineales basadas en técnicas por modos deslizantes de alto orden. Dichos observadores de estado fueron aplicados al modelo matemático perturbado del cuadirrotor. Adicionalmente, la metodología de sintonización del algoritmo super twisting se extendió al diseño del observador super twisting y del observador por modos deslizantes de alto orden. Por último, se ilustraron los resultados comparativos obtenidos de la simulación en lazo abierto de los observadores via Matlab/simulink con la finalidad de evaluar su desempeño, obteniendo los siguientes resultados:

- El estado estimado \hat{x} converge hacia el estado del sistema x en tiempo finito, aun bajo la presencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica.
- El HOSMO brinda mayor precisión en la estimación del estado desconocido. Además, se observa una mejor filtración al ruido.
- En relación a las velocidades lineales, se observa una convergencia mas rápida en los estados estimados por el observador HOSMO en los estados \hat{x} y \hat{y} , mientras que los resultados fueron similares para \hat{z} .
- Con respecto a las velocidades angulares, se observó una convergencia similar de los estados estimados $\hat{\phi}$ y $\hat{\theta}$ de ambos observadores, mientras que en el estimado $\hat{\psi}$ se observó un mejor resultado en el STO.
- Implementando el HOSMO, es posible estimar las perturbaciones e incertidumbres del sistema.
- Cuando no existe una perturbación o incertidumbre en las dinámicas del sistema, el se observa la presencia del chattering en el tercer estado del HOSMO (ver fig. 4.7).

En el siguiente capítulo se estudiarán los esquemas control-observador para el cuadirrotor. Además, se brindara un análisis de estabilidad en lazo cerrado, así como un estudio comparativo por medio de simulación numérica.

Capítulo 5

Diseño de control-observador no lineal para el cuadrirrotor

En este capítulo, se ilustra el diseño de esquemas de control basados en la información reconstruida por un observador de estados no lineal. Además, los esquemas controlador-observador estudiados son aplicados a las dinámicas del cuadrirrotor para realizar un control de seguimiento de los movimientos de translación y orientación. Finalmente, estos son evaluados en simulación numérica por medio de MATLAB/Simulink.

5.1. Estrategia de control basada en observador

En esta sección, se introduce una estrategia basada en un esquema control-observador. Dicha estrategia se divide en dos lazos de control conectados a un lazo conformado por el observador de estados (Figura 5.1). Además, las trayectorias de referencia X_{ref} , Y_{ref} , Z_{ref} y ψ_{ref} son definidas por el usuario.

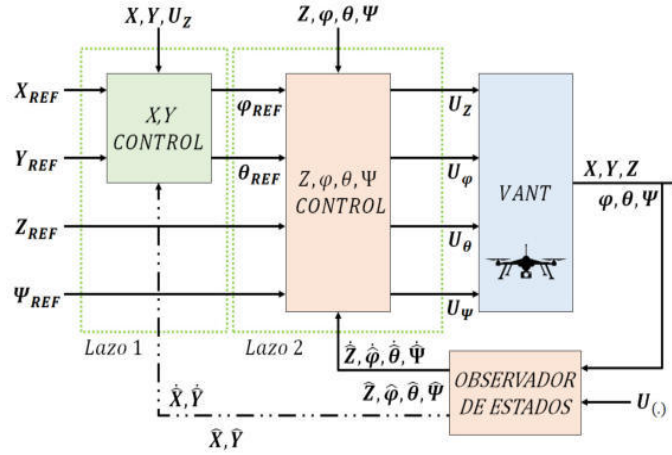


Figura 5.1: Estrategia de control basado en observador para el cuadrirrotor.

La función del Lazo 1 de control es proporcionar trayectorias de referencia para los ángulos ϕ y θ , además, garantizar el control de seguimiento de trayectorias para los ejes x y y . Por otro lado, el Lazo 2 de control contiene las dinámicas de altitud y de orientación del cuadrirrotor. Esta estrategia toma bases en la estrategia propuesta en la sección 3.1. Sin embargo, la estrategia de control requiere de un conocimiento exacto de los estados del sistema, además, en aplicaciones practicas es claro que no todas las mediciones del estado se encuentran disponibles. Por lo tanto, se requiere de un observador de estados capaz de reconstruir los estados no disponibles, en particular, las velocidades lineales y angulares del cuadrirrotor, aun en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

Entonces, con base en los estudios del capítulo 3 y 4, el Lazo 1 contiene las dinámicas de los movimientos en $x - y$ son

$$\ddot{x} = \frac{s_{\theta}}{m} U_Z + \delta_X, \quad \ddot{y} = \frac{s_{\phi}}{m} U_Z + \delta_Y \quad (5.1.1)$$

Las trayectorias de referencia para ϕ y θ son definidas a partir de (5.1) como

$$\theta_{ref} = \sin^{-1} \left(\frac{m}{U_Z} U_X \right) \quad \phi_{ref} = \sin^{-1} \left(\frac{m}{U_Z} U_Y \right)$$

Además, si los controles para de alabeo y cabeceo garantizan que la convergencia de los estados

del sistema ϕ y θ hacia las trayectorias de referencia ϕ_{ref} y θ_{ref} respectivamente, resulta

$$\ddot{x} = U_x + \delta_x, \quad \ddot{y} = U_y + \delta_y \quad (5.1.2)$$

Por otro lado, el lazo 2 contiene el control de las dinámicas de altitud y de los movimientos de orientación

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= (C_\phi C_\theta) \frac{U_z}{m} - g + \delta_z, \\ \ddot{\phi} &= U_\phi I_{xx}^{-1} - (I_{zz} - I_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi} I_{xx}^{-1} + \delta_\phi, \\ \ddot{\theta} &= U_\theta I_{yy}^{-1} - (I_{xx} - I_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} I_{yy}^{-1} + \delta_\theta, \\ \ddot{\psi} &= U_\psi I_{zz}^{-1} - (I_{yy} - I_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta} I_{zz}^{-1} + \delta_\psi. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Implementando un observador super twisting (STO), es posible estimar el estado desconocido del sistema en tiempo finito aun en presencia de perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Sin embargo, se ha demostrado que la implementación de un controlador super twisting basado en un STO no garantiza la condición del modo deslizante segundo orden, i.e $s = \dot{s} = 0$ [26]. Esto se debe a los términos discontinuos que aparecen en el control, lo cual produce un incremento en el chattering. Con el objetivo de superar este inconveniente, se ha propuesto la implementación del control super twisting basado en observador por modos deslizantes de alto orden (HOSMO)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + K_1 |\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + f(\hat{x}) + g(\hat{x})u \\ \dot{\hat{x}}_3 &= K_3 \text{sign}(\hat{e}_1) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

cuya estabilidad y convergencia fue demostrado en el Capitulo 4. Una vez establecida la estructura de la estrategia de control, el contenido de los lazos 1 y 2 de control y el observador que será implementado, el diseño de un controlador basado en la información del estado estimado dado por el observador por modos deslizantes de alto orden (HOSMO) será sintetizado en las siguientes secciones. En términos generales, el estudio del STC y el ASTC es similar, siendo la única diferencia la dependencia del tiempo de la ganancia L en el controlador adaptativo. Por lo tanto, se realizara un estudio general para ambos controladores super twisting. En relación al controlador backstep-

ping, con la finalidad de garantizar robustez y mejorar la precisión, este controlador se basará en la información reconstruida por el HOSMO. Además, el diseño de este esquema control-observador será sintetizado en la sección 5.3 con el propósito de garantizar el seguimiento en presencia de perturbaciones e incertidumbre.

5.2. Control super twisting basado en observador por modos deslizantes de alto orden

Se considera la clase de sistema no lineal con incertidumbre descrito a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= CX = x_1\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

donde $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema. $C = [1 \ 0]$ es la matriz de salida, $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{R}$ son términos nominales no lineales del sistema, y δ corresponde a las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

Ahora, con el objetivo de diseñar un controlador para el sistema (5.2.1), definimos los errores de seguimiento como

$$e_1 = x_1 - x_1^d, \quad e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d\tag{5.2.2}$$

donde las dinámicas del error de seguimiento están dadas como

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f(x) + g(x)u - \ddot{x}_1^d + \delta\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

Bajo estas condiciones, definimos una nueva variable deslizante

$$\hat{s} = \tilde{e}_2 + ce_1\tag{5.2.4}$$

donde $\tilde{e}_2 = \hat{x}_2 - \dot{x}_1^d$. Ya que $e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d = \hat{e}_2 + \tilde{e}_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\hat{s} &= ce_1 + e_2 - \hat{e}_2 \\ &= ce_1 + \dot{e}_1 - \hat{e}_2\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

lo cual resulta que $\dot{e}_1 = \hat{s} - ce_1 + \hat{e}_2$. Entonces, las dinámicas de la nueva variable deslizante son expresadas a través de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{s}}_1 &= \dot{\hat{e}}_2 + c\dot{e}_1 \\ &= \dot{\hat{x}}_2 - \ddot{x}_1^d + c(\hat{e}_2 + \tilde{e}_2) \\ &= \dot{\hat{x}}_2 - \ddot{x}_1^d + c(\hat{x}_2 - \dot{x}_1^d)\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

Entonces, de las dinámicas de $\dot{\hat{x}}_2$, obtenemos

$$\dot{\hat{s}} = c\hat{e}_2 + c\tilde{e}_2 - \ddot{x}_1^d + f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + K_2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) + K_3\int_0^t \text{sign}(\hat{e}_1)d\tau\tag{5.2.7}$$

Seleccionando la siguiente ley de control

$$u = \frac{1}{g(\hat{x})} \left[\ddot{x}_1^d - f(\hat{x}) - c(\hat{x}_2 - \dot{x}_1^d) - K_2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) - K_3\int_0^t \text{sign}(\hat{e}_1)d\tau + v \right]\tag{5.2.8}$$

y sustituyendo (5.2.8) en (5.2.7), resulta que las dinámicas de la variable deslizante en lazo cerrado están dadas por

$$\dot{\hat{s}} = c\hat{e}_2 - 2L_{ST}|\hat{s}|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\hat{s}) - \int_0^t \frac{L_{ST}^2}{2}\text{sign}(\hat{s})d\tau\tag{5.2.9}$$

donde $L_{ST} = L$ para el STC y $L_{ST} = L(t)$ para el ASTC. Ya que $K_2 = 2Lo^2$, $K_3 = (\frac{2}{3})^2Lo^3$, El controlador (5.2.8) solamente depende de las ganancias L_{ST} y Lo , lo cual simplifica su sintonización.

El sistema (5.2.1) en lazo cerrado se representa en coordenadas de x_1 y \hat{s} de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \hat{s} - ce_1 + \hat{e}_2 + \dot{x}_1^d \\ \dot{\hat{s}} &= ce_2 - 2L_{ST}|\hat{s}|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\hat{s}) + \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{L_{ST}^2}{2}\text{sign}(\hat{s})d\tau\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

con los errores de estimación

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= -K_1|\hat{e}_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_2 &= -K_2|\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{e}_3 + \tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u \\ \dot{\hat{e}}_3 &= -K_3\text{sign}(\hat{e}_1 + \hat{\delta})\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

Una vez que el error de estimación $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)^T$ converge a cero en tiempo finito, el sistema completo en lazo cerrado es dado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \hat{s} - ce_1 + \dot{x}_1^d \\ \dot{\hat{s}} &= -2L_{ST}|\hat{s}|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\hat{s}) + \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{L_{ST}^2}{2}\text{sign}(\hat{s})d\tau\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

donde las 2 ecuaciones inferiores de la ec. (5.5.12) son un algoritmo super twisting. Ahora, seleccionando $L_{ST} > 0$ suficientemente grande, o en el caso adaptativo la ley $L_{ST} = L(t)$ será proporcionada por una ley de adaptación, entonces, las trayectorias del sistema (5.2.1) convergerán hacia la superficie deslizando en tiempo finito, satisfaciendo la condición $\hat{s} = \dot{\hat{s}} = 0$, y el modo deslizando de segundo orden es alcanzado. Esto implica que el sistema en lazo cerrado es dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -c(x_1 - x_1^d) + \dot{x}_1^d \\ \dot{x}_2 &= -c(x_1 - x_1^d) + \dot{x}_1^d\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

En consecuencia, los estados x_1 y x_2 convergen a la referencia asintóticamente, seleccionando $c > 0$.

5.3. Control backstepping basado en observador por modos deslizantes de alto orden

Se considera el siguiente sistema no lineal con incertidumbre

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= CX = x_1\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

donde $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema. $C = [1 \ 0]$ es la matriz de salida, $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{R}$ son términos nominales no lineales del sistema, y δ corresponde a las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

Ahora, definiendo los errores de seguimiento, tenemos

$$e_1 = x_1 - x_1^d, \quad e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d\tag{5.3.2}$$

donde x_1^d es el valor deseado para x_1 , y es por lo menos dos veces diferenciable. Ahora, derivando los errores de seguimiento con respecto al tiempo se obtienen las siguientes dinámicas

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad \dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_1^d\tag{5.3.3}$$

Entonces, con el objetivo de estabilizar el sistema (5.3.3) consideraremos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2\tag{5.3.4}$$

La derivada con respecto al tiempo de (5.3.4) a lo largo de las trayectorias de (5.3.2) se calcula como

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 \\ &= e_1 (x_2 - \dot{x}_1^d)\end{aligned}\tag{5.3.5}$$

Sin embargo, la medición del estado x_2 no esta disponible. Entonces, redefinimos e_2 de la siguiente forma

$$e_2 = x_2 - \dot{x}_1^d = \tilde{e}_2 + \hat{e}_2 \quad (5.3.6)$$

donde $\hat{e}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ corresponde al error de estimación, $\tilde{e}_2 = \hat{x}_2 - \hat{x}_2 - \dot{x}_1^d$ el error de seguimiento entre el estimado y la referencia. Recordando que el error de estimación converge en tiempo finito a cero, por lo tanto los estado estimados convergen a los estados del sistema, sustituimos \hat{x}_2 por x_2 en (5.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \tilde{e}_2 \\ &= e_1 (\hat{x}_2 - \dot{x}_1^d) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Ahora, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \tilde{e}_2^2 \quad (5.3.8)$$

Además, su derivada co respecto al tiempo a través de las soluciones de (5.3.2) y (5.3.6) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_1 \tilde{e}_2 + \tilde{e}_2 \dot{\tilde{e}}_2 \\ &= \tilde{e}_2 \left(e_1 + f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - \ddot{x}_1^d \right) \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Entonces, se propone la siguiente ley de control

$$u = \frac{1}{g(\hat{x})} \left[\ddot{x}_1^d - f(\hat{x}) - K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - (k_1 k_2 + 1) e_1 - (k_1 + k_2) \tilde{e}_2 \right] \quad (5.3.10)$$

Sustituyendo (5.3.10) en (5.3.9)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \tilde{e}_2 \left[e_1 + f(\hat{x}) + g(\hat{x}) \left(\frac{1}{g(\hat{x})} \left[\ddot{x}_1^d - f(\hat{x}) - K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - (k_1 k_2 + 1) e_1 - (k_1 + k_2) \tilde{e}_2 \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - \ddot{x}_1^d \right] \\
&= \tilde{e}_2 \left[e_1 + f(\hat{x}) + \ddot{x}_1^d - f(\hat{x}) - K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - (k_1 k_2 + 1) e_1 - (k_1 + k_2) \tilde{e}_2 \right. \\
&\quad \left. + K_2 |\hat{e}_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{e}_1) + \hat{x}_3 - \ddot{x}_1^d \right] \\
&= \tilde{e}_2 (-k_1 k_2 e_1 - (k_1 + k_2) \tilde{e}_2) \\
&= -k_1 k_2 e_1 \tilde{e}_2 - k_1 \tilde{e}_2^2 - k_2 \tilde{e}_2^2
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

donde $k_1, k_2 > 0$ son las ganancias del controlador. Entonces la función (5.3.11) es una función definida negativa. De acuerdo a la teoría de Lyapunov, el sistema es asintóticamente estable. Además, cuando $e_1 = 0$ y $\tilde{e}_2 = 0$ el sistema es globalmente exponencialmente estable, y por lo tanto $x_1 \rightarrow x_1^d$, $\hat{x}_2 \rightarrow \dot{x}_1^d$.

5.4. Resultados comparativos

En esta sección se ilustran los resultados obtenidos de la simulación numérica de los esquemas de control estudiados y aplicados al modelo del cuadrirrotor en este capítulo con la finalidad de verificar el desempeño de la metodologías estudiadas. Los parámetros para el modelo matemático del cuadrirrotor considerados en la simulación son los siguientes:

Parámetro	Valor	Unidad
Masa (m)	1.1	kg
Gravedad (g)	9.81	m/s^2
Inercia en el eje X (I_{xx})	1.22	$N \cdot s^2/rad$
Inercia en el eje Y (I_{yy})	1.22	$N \cdot s^2/rad$
Inercia en el eje Z (I_{zz})	2.2	$N \cdot s^2/rad$

Tabla 5.1: Parámetros nominales del cuadrirrotor.

Además, se establecen las siguientes condiciones iniciales para el modelo matemático del cua-

drirrotor y el observador por modos deslizantes de alto orden:

$$\begin{aligned} [X(0), Y(0), Z(0), \phi(0), \theta(0), \psi(0)] &= [1, 2, 0, 0.5, 0.5, 1] \\ [\hat{X}(0), \hat{Y}(0), \hat{Z}(0), \hat{\phi}(0), \hat{\theta}(0), \hat{\psi}(0)] &= [0, 0, 0, 0, 0, 0] \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

La Tabla 5.2 contiene ganancias y parámetros empleados en la simulación numérica para la sintonización de los controladores y observadores de estado.

	STC		ASTC			Backstepping		HOSMO
	c	L	c	k	L^*	k_1	k_2	Lo
Control Longitudinal, x	3	1.5	3	0.03	0.005	4	2	1.5
Control Latitudinal, y	3	1.5	3	0.02	0.005	4	2.2	1.5
Control de Altitud, z	5	2.5	5	0.04	0.008	4	3	2
Control de Alabeo, ϕ	3	2	3	0.075	0.008	6	3	2
Control de Cabeceo, θ	3	2	3	0.09	0.008	8	5	2
Control de Guiñada, ψ	2	1.5	1.4	0.25	0.005	2.5	1.5	2

Tabla 5.2: Ganancias y parámetros para la sintonización de esquemas control-observador.

Además, para dar validez a los resultados, se diseña una trayectoria ascendente y circular, con cambios en las referencia de los ejes x y y . Por otro lado, se introduce un cambio en la masa del cuadrirrotor simulando que ha recogido un paquete de 1.1 kg, i.e. de 1.1 kg a 2.2 kg después de 10 s con la finalidad de evaluar la capacidad de mantener la estabilidad de vuelo ante un cambio en la masa. El ángulo de guiñada deseado es estabilizado, mientras que los ángulos de alabeo y cabeceo deseados son definidos por los controles virtuales U_X y U_Y . Con el objetivo de evaluar la robustez de los esquemas estudiados en este capítulo, se introducen las siguientes perturbaciones(ver Apéndice A) e incertidumbres aditivas al modelo nominal del cuadrirrotor:

$$\begin{aligned} \delta_X &= \sin(t) + W_s & \delta_Y &= \cos(t) + W_s & \delta_Z &= 0.5\cos(t)\tan(0.2t) + \Delta m \\ \delta_\phi &= \tau_{d_\phi} & \delta_\theta &= \tau_{d_\theta} & \delta_\psi &= 0.5\cos(t)\sin(0.5t) + \tau_{d_\psi} \end{aligned}$$

Finalmente, con el propósito de evaluar la optimidad de los esquemas estudiados, se emplean índices de desempeño del error de seguimiento de cada grado de libertad de la aeronave, y de las entradas de control (Ver Apéndice C).

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la simulación:

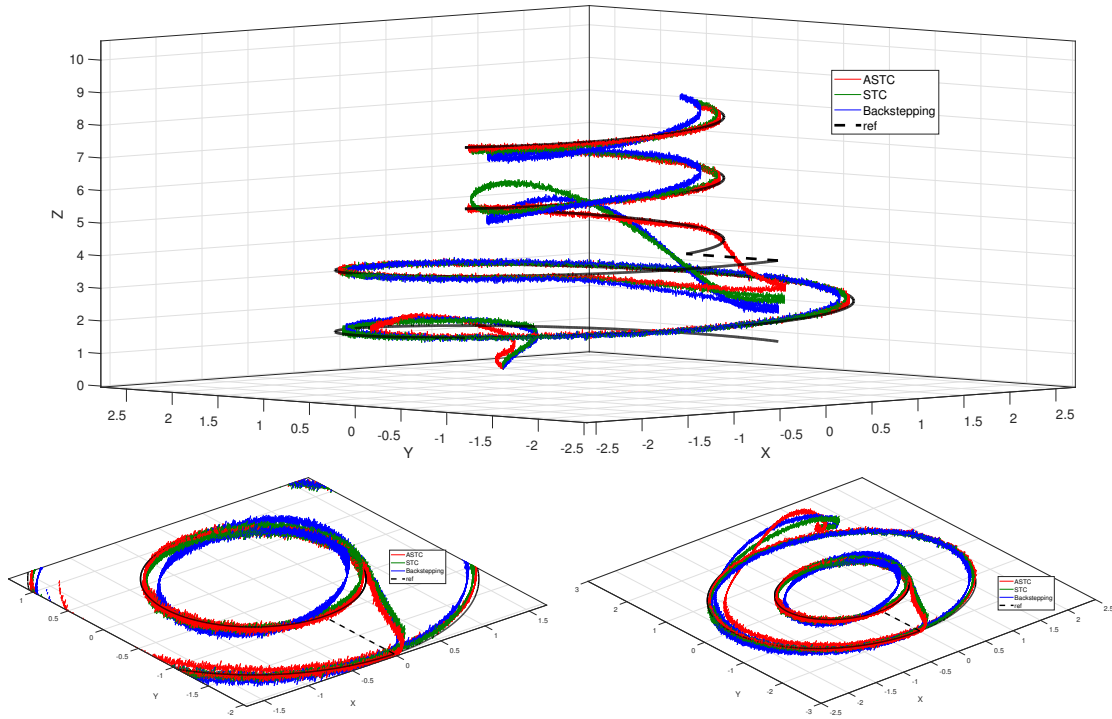


Figura 5.2: Seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor. **Arriba Izquierda:** Trayectoria completa en el plano XYZ . **Abajo Izquierda:** Trayectorias en el plano XY al cambiar la referencia. **Abajo derecha:** Trayectoria del cuadrirrotor en el plano XY .

La Figura 5.2 ilustra la trayectoria de referencia diseñada para el cuadrirrotor en el plano XYZ . Dicha trayectoria de referencia considera una entrada rampa que comienza a partir de una altitud de 1 m en el eje Z , mientras que en el eje X y Y se introducen señales $2\cos(t)$ y $2\sin(t)$, respectivamente. La Figura 5.3 muestra el seguimiento de trayectorias de translación individuales desempeñado por cada uno de los controles estudiados en este capítulo. El cambio de masa se agrega a las dinámicas de altitud a partir de 10 s , variando la masa nominal de 1.1 kg a 2.2 kg .

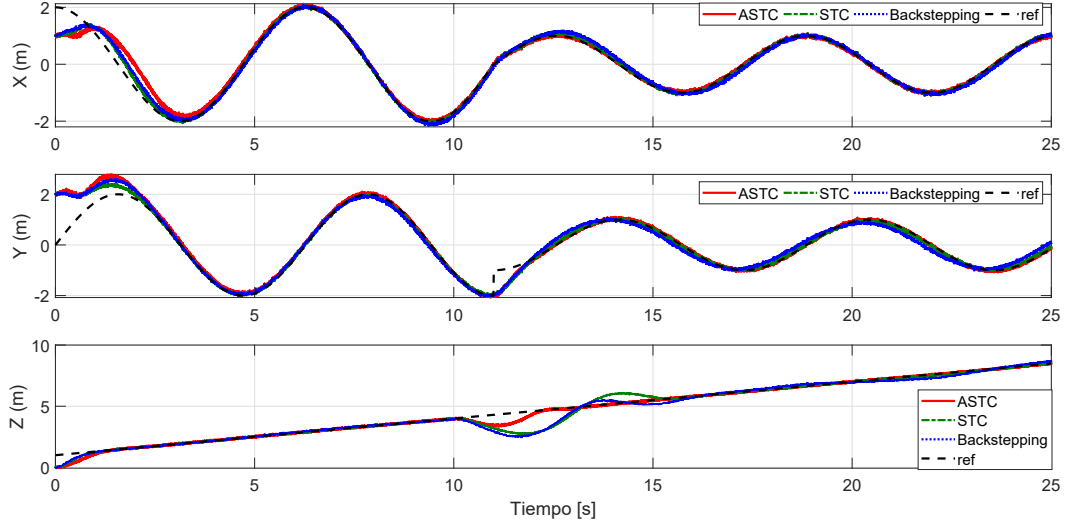


Figura 5.3: Seguimiento de trayectorias de translación del cuadrirrotor.

Es posible observar como se pierde el seguimiento de la trayectoria de altitud. Con respecto al seguimiento en los ejes X y Y , la amplitud de la señal de referencia es reducida a la mitad en ambos casos. La Figura 5.4 muestra el seguimiento de las trayectorias de orientación o ángulos

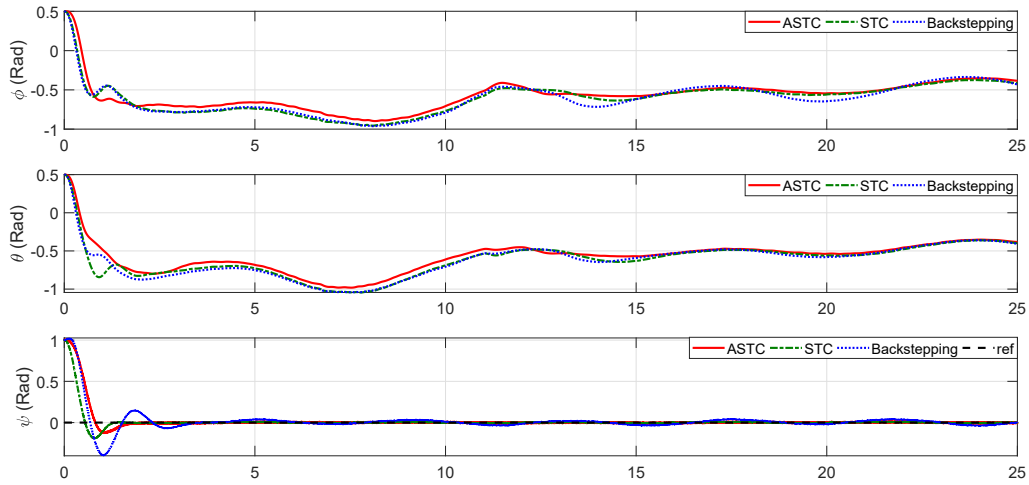


Figura 5.4: Seguimiento de trayectorias de orientación del cuadrirrotor

de Euler descritos por el cuadrirrotor. Observe que en la Figura 5.4 no se ilustra la trayectoria de referencia de los ángulos de Euler deseados ϕ_{ref} y θ_{ref} . Esto es debido a que la señal de control U_Z

que entra al Lazo 1 de control de la estrategia propuesta, que es necesaria para generar los ángulos deseados, difiere durante los transitorios para cada ley de control, cada vez que se produce un cambio en la referencia o cuando se genera el cambio en la masa de la aeronave (ver Figura 5.5). La Figura 5.5 ilustra la respuesta en el tiempo de las entradas de control nominales o reales del cuadrirrotor. En los controles de orientación, se aprecia más claramente la reducción de chattering del esquema de control ASTC+HOSMO. Es posible observar que el cambio en la masa se afecta directamente en la acción de control, sufriendo un incremento en la amplitud de la entrada de

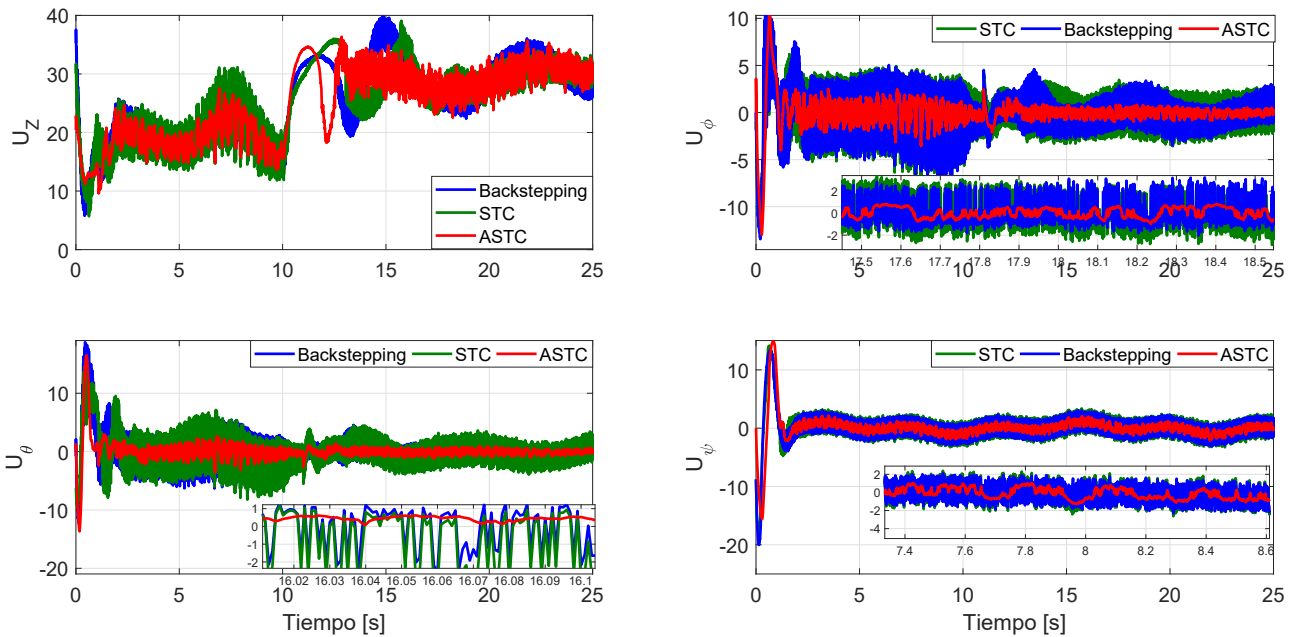


Figura 5.5: Respuesta de las entradas de control.

control. Nótese que el cambio en la masa del cuadrirrotor provoca un acrecentamiento en la ganancia L_z del controlador ASTC para recuperar la trayectoria de forma efectiva (ver Figura 5.6). La Figura 5.6 ilustra el comportamiento dinámico de la ganancia adaptable del ASTC basado en el HOSMO. Es posible apreciar que el esquema backstepping+HOSMO presenta un error en estado estable mayor que los esquemas por modos deslizantes. Cuando el cambio en la masa es introducido, se observa que la acción de control más eficiente fue la del esquema ASTC+HOSMO, el cual recupera la trayectoria deseada de forma satisfactoria.

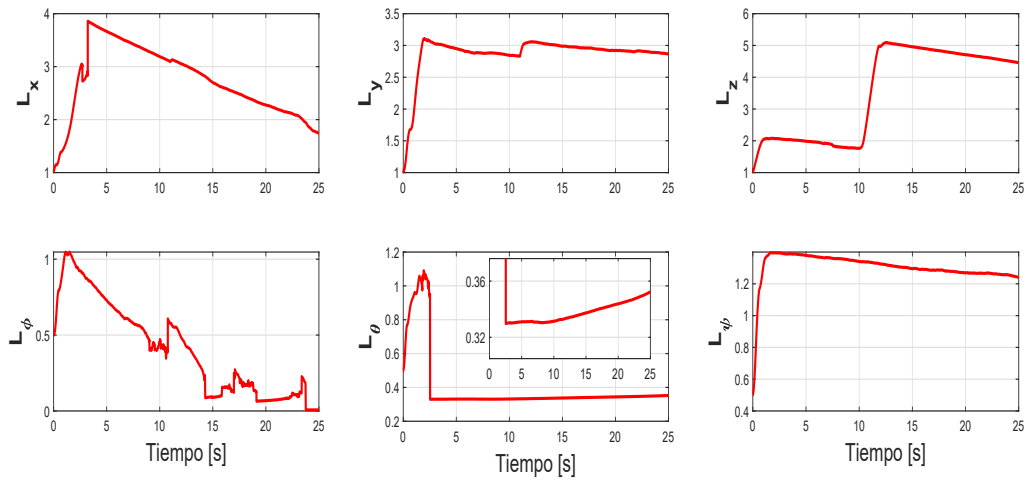
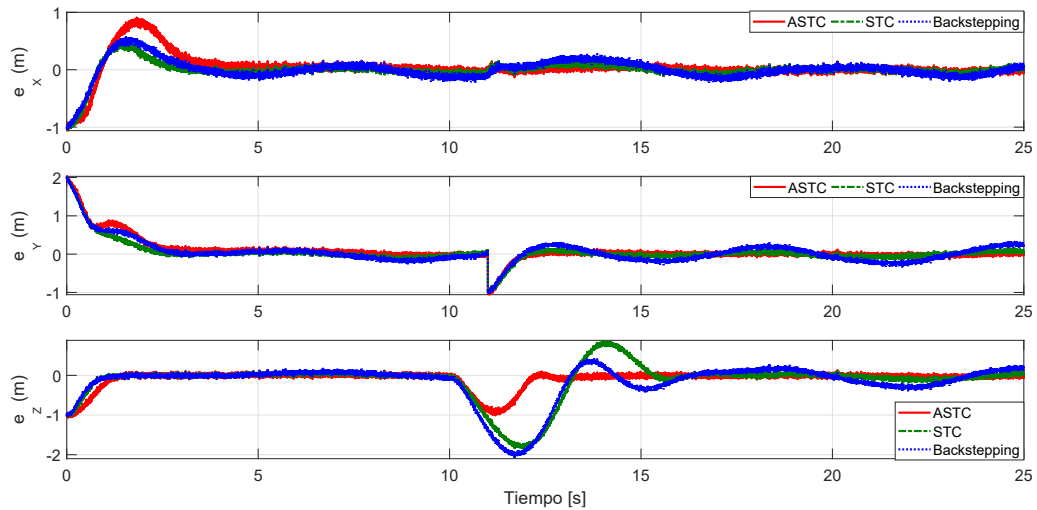


Figura 5.6: Ganancias adaptativas del esquema ASTC+HOSMO

Los errores de seguimiento desempeñados por cada esquema controlador-observador son mostrados en la Figura 5.7. Es posible apreciar que el esquema backstepping+HOSMO presenta un error en estado estable mayor que los esquemas por modos deslizantes. Cuando el cambio en la masa es introducido, se observa que la acción de control más eficiente fue la del esquema ASTC+HOSMO, el cual recupera efectivamente la trayectoria de referencia.

Figura 5.7: Error de seguimiento xyz

Por otro lado, los esquemas STC+HOSMO y backstepping+HOSMO alcanzan un error aproxi-

mado de -2 m antes de ejercer una acción para recuperar la referencia. Además, estos esquemas presentan un sobreimpulso, resaltando la eficacia del método propuesto.

La Figura 5.8 ilustra el error de seguimiento de los movimientos de orientación, donde se aprecia que e_ϕ y e_θ han sido reducidos de forma más eficaz por los esquemas ASTC+HOSMO y backstepping+HOSMO. Por otro lado, se observa que el esquema backstepping+HOSMO se ve mayormente afectado por perturbaciones cuando se requiere estabilizar el ángulo de guiñada.

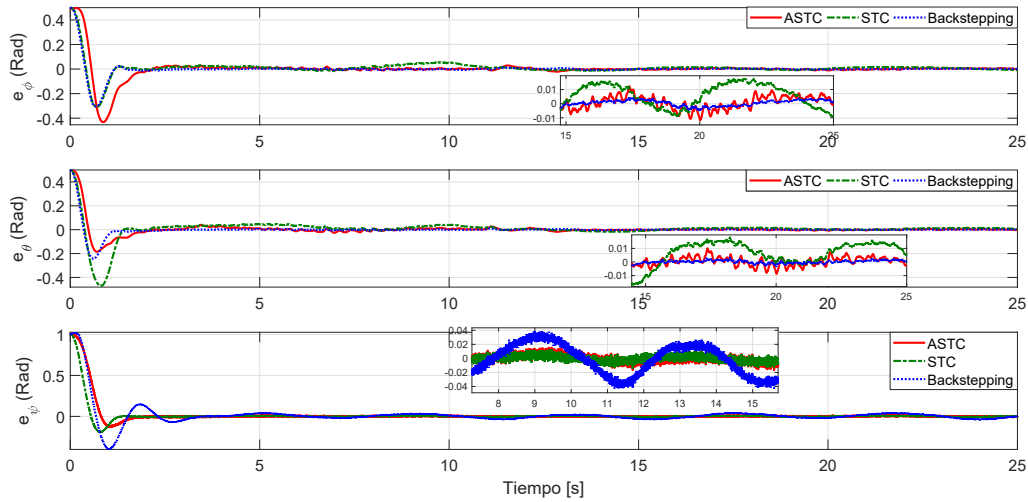


Figura 5.8: Error de seguimiento de los ángulos de orientación ϕ, θ, ψ

La Tabla 5.3 muestra los resultados comparativos de los índices de desempeño calculados basados en el error de seguimiento. Los valores numéricos indicados en negritas son los resultados que mostraron un mejor desempeño en el seguimiento de trayectorias.

Esquema	e^2	$ e $	$\int_{t_0}^{t_f} e^2 dt$	$\int_{t_0}^{t_f} e dt$
ASTC+ HOSMO	27.31	21.51	43.8	104.4
Backstepping+HOSMO	29.52	25.28	147.6	198.1
STC+HOSMO	27.1	24.15	110.2	180

Tabla 5.3: Evaluación de los índices de desempeño del error de seguimiento.

Por otro lado, la Tabla 5.4 evalúa los individualmente el desempeño de cada controlador, indicando en negritas al valor numérico que mejor optimiza el consumo de energía.

Control	ASTC+HOSMO			BStepping+HOSMO			STC+HOSMO		
	J	u^2	$ u $	J	u^2	$ u $	J	u^2	$ u $
Altitud, Z	1.66e4	1.66e4	625.6	1.75e4	1.735e4	636	1.71e4	1.7e4	631.3
Alabeo, ϕ	123.1	119.2	33.5	161.1	159	46.86	183.7	182.1	58.13
Cabeceo, θ	135.6	130.6	29.6	189.4	187.8	88.62	240.6	237.4	60.74
Guiñada, ψ	152.1	145.4	25.5	198	193.1	39.29	187.2	182.4	39.8

Tabla 5.4: Evaluacion de los indices de desempeño del controlador.

Los resultados presentados en La Tabla 5.3 indican que el ASTC+HOSMO supera a las metodologías backstepping+HOSMO y STC+HOSMO en el seguimiento de trayectorias, exceptuando el IEC. Con respecto las leyes de control evaluadas en la Tabla 5.4, se puede observar que el ASTC basado en observador HOSM requiere menor consumo de energía para alcanzar los objetivos de control, donde J es la medida de desempeño modificada [50], el cual nos indica que se alcanza la referencia mientras se conserva la energía.

5.5. Conclusiones

En este capítulo, se presentó un estudio comparativo de tres técnicas de control basadas en un observador por modos deslizantes de alto orden. Además, se propuso una estrategia de control para alcanzar los objetivos.

- Se presentaron resultados comparativos de forma gráfica donde se mostró el seguimiento de trayectorias de los controladores y el comportamiento de las entradas de control del cuadrirrotor.
- Se presentaron resultados de la evaluación de los indices de desempeño para el error de seguimiento y esfuerzo del controlador, donde se aprecian mejores resultados para el esquema adaptable, debido a la robustez brindada ante cambios repentinos en los parametros del sistema y perturbaciones externas.
- El esquema ASTC+HOSMO brinda una reducción en el chattering, siendo notable mayormente en la reducción de la frecuencia de estas oscilaciones.

- La metodología de sintonización redujo la cantidad de ganancias a sintonizar, facilitando la implementación del controlador y del observador.

Conclusiones

En la presente tesis, se estudió el problema de seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor bajo la acción de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Para hacer frente a este problema, se diseñó un esquema de control no lineal adaptable basada en la técnica super twisting. Adicionalmente, se implementó un observador por modos deslizantes de alto orden para estimar las mediciones de los estados del cuadrirrotor no disponibles.

Debido a que el cuadrirrotor es un sistema dinámico no lineal y subactuado, el cual consiste de 6 grados de libertad y 4 entradas de control se propuso una estrategia capaz de controlar todas las variables de estado. Dicha estrategia de control consiste en dos lazos de control interconectados entre sí, donde el Lazo 1 entrega los ángulos de referencia de alabeo y cabeceo deseados al Lazo 2 de control. Un observador de estados retroalimenta los lazos de control con la estimación de los estados desconocidos para alcanzar el objetivo de control. Los tres esquemas control-observador se basan en la estrategia propuesta.

Además, se introdujo una metodología de sintonización de ganancias del observador de alto orden por modos deslizantes combinada con la ganancia adaptable del controlador super twisting. El análisis de estabilidad se basa en el enfoque de Lyapunov, donde se proporcionan condiciones de suficiencia para garantizar la convergencia a cero en tiempo finito de la variable deslizante y sus dinámicas.

Finalmente, los esquemas de control fueron implementados en Matlab/Simulink en presencia de perturbaciones externas, donde se evaluó el desempeño bajo diferentes criterios. Se observó

una mejora significativa en la reducción de chattering, rechazo a perturbaciones y reducción de ruido blanco para el esquema ASTC+HOSMO. Los índices de desempeño IEA, ITEC e ITVAE demostraron que el esquema ASTC+HOSMO brinda un mejor desempeño y una mayor precisión en el seguimiento de trayectorias. Estos resultados se deben a la robustez del controlador y su convergencia en tiempo finito. Además, se evaluaron individualmente los índices de desempeño de las entradas de control, donde el esquema ASTC+HOSMO alcanza el objetivo de control conservando la energía.

Por lo tanto, se concluye que el método de interés alcanza el objetivo de control, garantizando un óptimo seguimiento y la robustez, y satisface los objetivos establecidos. Además, la presente metodología puede ser extendida a otros sistemas dinámicos que cumplan con la forma feedback linealizable.

Trabajo futuro

Para la posterioridad del presente trabajo, los siguientes puntos son sugeridos como trabajo de investigación:

- Implementación del esquema ASTC+HOSMO en una plataforma de prueba.
- Realizar una estimación de parámetros por medio de un observador de estados adaptativo, para reducir la pérdida de trayectorias cuando existen cambios en los parámetros del sistema.
- Validación de resultados comparativos/experimental entre el ASTC+HOSMO y el ASTC basado en un observador de estados adaptativo.
- Diseño de trayectorias de mayor complejidad para el cuádrirrotor.
- Extender la metodología ASTC+HOSMO a otros sistemas dinámicos no lineales.

Bibliografía

- [1] J. C. Aladro, M. I. G. Álvarez, G. D. González, and J. Gómez-Aleixandre, “Wind speed model design and dynamic simulation of a wind farm embedded on distribution networks,”
- [2] S. G. Gupta, D. Ghonge, P. M. Jawandhiya, *et al.*, “Review of unmanned aircraft system (uas),” *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET) Volume*, vol. 2, 2013.
- [3] K. P. Valavanis and G. J. Vachtsevanos, *Handbook of unmanned aerial vehicles*, vol. 1. Springer, 2015.
- [4] P. J. Springer, *Military robots and drones: a reference handbook*. ABC-CLIO, 2013.
- [5] R. Miranda Colorado, R. Garrido, L. Aguilar, and J. E. Herrero, *Drones: Modelado y control de cuadrotores* (<https://www.alfaomega.com.mx/default/catalogo/profesional/ciencia-y-tecnologia/drones.html>). 10 2018.
- [6] K. Nonami, F. Kendoul, S. Suzuki, W. Wang, and D. Nakazawa, *Autonomous flying robots: unmanned aerial vehicles and micro aerial vehicles*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] K. P. Valavanis, *Advances in unmanned aerial vehicles: state of the art and the road to autonomy*, vol. 33. Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] A. C. Watts, V. G. Ambrosia, and E. A. Hinkley, “Unmanned aircraft systems in remote sensing and scientific research: Classification and considerations of use,” *Remote Sensing*, vol. 4, no. 6, pp. 1671–1692, 2012.

- [9] G. Singhal, B. Bansod, and L. Mathew, "Unmanned aerial vehicle classification, applications and challenges: A review," 2018.
- [10] L. R. G. Carrillo, A. E. D. López, R. Lozano, and C. Pégard, *Quad rotorcraft control: vision-based hovering and navigation*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, "Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor," in *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)(IEEE Cat. No. 04CH37566)*, vol. 3, pp. 2451–2456, IEEE, 2004.
- [12] E. Reyes-Valeria, R. Enriquez-Caldera, S. Camacho-Lara, and J. Guichard, "Lqr control for a quadrotor using unit quaternions: Modeling and simulation," in *CONIELECOMP 2013, 23rd International Conference on Electronics, Communications and Computing*, pp. 172–178, IEEE, 2013.
- [13] S. Haoqin, H. Zhan, B. Xiaoxiang, S. Hongwei, and S. Jing, "Morphing process research of uav with pid controller," *Procedia Engineering*, vol. 99, pp. 873–877, 2015.
- [14] A. T. Gaitan and Y. Bolea, "Modeling and robust attitude control of a quadrotor system," in *2013 10th international conference on electrical engineering, computing science and automatic control (CCE)*, pp. 7–12, IEEE, 2013.
- [15] I. Petruševski and A. Rakić, "Simple fuzzy solution for quadrotor attitude control," in *12th Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering (NEUREL)*, pp. 93–98, IEEE, 2014.
- [16] S. Bouabdallah and R. Siegwart, "Full control of a quadrotor," in *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 153–158, Ieee, 2007.
- [17] O. Araar and N. Aouf, "Quadrotor control for trajectory tracking in presence of wind disturbances," pp. 25–30, 2014.

- [18] V. Artale, M. Collotta, C. Milazzo, G. Pau, and A. Ricciardello, "An adaptive trajectory control for uav using a real-time architecture," in *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 32–42, IEEE, 2014.
- [19] C. Nicol, C. Macnab, and A. Ramirez-Serrano, "Robust adaptive control of a quadrotor helicopter," *Mechatronics*, vol. 21, no. 6, pp. 927–938, 2011.
- [20] C. Edwards, E. F. Colet, L. Fridman, E. F. Colet, and L. M. Fridman, *Advances in variable structure and sliding mode control*, vol. 334. Springer, 2006.
- [21] Y. Shtessel, M. Taleb, and F. Plestan, "A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application," *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 759–769, 2012.
- [22] L. Derafa, A. Benallegue, and L. Fridman, "Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors uav," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 685–699, 2012.
- [23] J. A. Moreno and M. Osorio, "Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 57, no. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [24] J. Yang, S. Li, and X. Yu, "Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer," *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 60, no. 1, pp. 160–169, 2012.
- [25] A. Chalanga, S. Kamal, L. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A. Moreno, "How to implement super-twisting controller based on sliding mode observer?," in *2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 1–6, IEEE, 2014.
- [26] A. Chalanga, S. Kamal, L. M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A. Moreno, "Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, pp. 3677–3685, 2016.
- [27] L. Garcia Carrillo, A. Dzul López, R. Lozano, and C. Pégard, "Quad rotorcraft control: Vision-based hovering and navigation," 2013.

- [28] J. Kim, M.-S. Kang, and S. Park, "Accurate modeling and robust hovering control for a quadrotor vtol aircraft," in *Selected papers from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA June 8–10, 2009*, pp. 9–26, Springer, 2009.
- [29] T. Luukkonen, "Modelling and control of quadcopter," *Independent research project in applied mathematics, Espoo*, vol. 22, 2011.
- [30] A. S. Sanca, P. J. Alsina, and F. C. Jesús de Jesus, "Dynamic modelling of a quadrotor aerial vehicle with nonlinear inputs," in *2008 IEEE Latin American Robotic Symposium*, pp. 143–148, IEEE, 2008.
- [31] T. Bresciani, "Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter," *MSc Theses*, 2008.
- [32] J. L. Barahona-Avalos, C. H. Silva-López, and J. Linares-Flores, "Control de velocidad de un motor de cd con conexión en serie mediante rechazo activo de perturbaciones," in *Proceedings of the Congreso Nacional de Control Automático*, 2015.
- [33] AspenCore, "Dcmotor," Available: <https://www.electronics-tutorials.ws/iot/iot7.html>.
- [34] O. Liang, "Brushed motors vs. brushless motors for quadcopter," Available: <https://oscarliang.com/brushed-vs-brushless-motor>.
- [35] Renesas, "What are brushless dc motors," Available: <https://www.renesas.com/us/en/support/technical-resources/engineer-school/brushless-dc-motor-01-overview.html>.
- [36] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust*. Prentice Hall International (UK) Ltd., 1996.
- [37] I. A. Raptis and K. P. Valavanis, *Linear and nonlinear control of small-scale unmanned helicopters*, vol. 45. Springer Science & Business Media, 2010.
- [38] D. P. CARELLI, "Nonlinear attitude and position control for a quadrotor uav," 2017.

- [39] S. V. Gutierrez, J. De León-Morales, F. Plestan, and O. Salas-Peña, "A simplified version of adaptive super-twisting control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 29, no. 16, pp. 5704–5719, 2019.
- [40] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control," *International journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [41] Y. B. Shtessel, J. A. Moreno, F. Plestan, L. M. Fridman, and A. S. Poznyak, "Super-twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design," in *49th IEEE conference on decision and control (CDC)*, pp. 5109–5113, IEEE, 2010.
- [42] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak, "New methodologies for adaptive sliding mode control," *International journal of control*, vol. 83, no. 9, pp. 1907–1919, 2010.
- [43] Y. Shtessel, F. Plestan, and M. Taleb, "Super-twisting adaptive sliding mode control with not-overestimated gains: Application to an electropneumatic actuator," in *IFAC World Congress*, p. 1, 2011.
- [44] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [45] S. Čelikovský and H. Nijmeijer, "Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case," *Systems & Control Letters*, vol. 27, no. 3, pp. 135–144, 1996.
- [46] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [47] X. Li, D. Hui, X. Lai, and T. Yan, *Power Quality Control in Wind/Fuel Cell/Battery/Hydrogen Electrolyzer Hybrid Micro-grid Power System*. 04 2011.
- [48] H. Li, Q. Jing, and B. Ma, "Modeling and parametric study on drag torque of wet clutch," in *Proceedings of the FISITA 2012 world automotive congress*, pp. 21–30, Springer, 2013.
- [49] S. M. Shinnars, *Modern control system theory and design*. John Wiley & Sons, 1998.
- [50] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2004.

- [51] P. D. Domański, P. D. Domański, and Ditzinger, *Control Performance Assessment: Theoretical Analyses and Industrial Practice*. Springer, 2020.

Apéndice A

Perturbaciones

Una perturbación es una señal que afecta de forma negativa el comportamiento de la señal de salida del sistema. Si una perturbación se produce dentro del sistema se denomina interna. Por otro lado, si la perturbación se origina fuera del sistema y es una entrada, se denomina perturbación externa [46].

Existen diversos efectos adversos que afectan la estabilidad del vehículo durante el vuelo tales como el peso y centrado, datum, brazo, momento de inercia, límites de centro de gravedad, pares giroscópicos, fuerzas de arrastre, ráfagas de viento, en esta sección solo se abordarán las perturbaciones empleadas para la simulación de los esquemas control observador en el Capítulo 5.

Ráfagas de viento (W_s) Las ráfagas de viento son perturbaciones externas habituales, que afectan la estabilidad de los VANT. Para describir las características de los cambios repentinos del viento se emplea, se considerará un modelo de la velocidad del viento en el cual se multiplica la velocidad de una fluctuación aleatoria derivada de una señal de ruido blanco en Matlab/Simulink (Ver Figura A.1) [47]

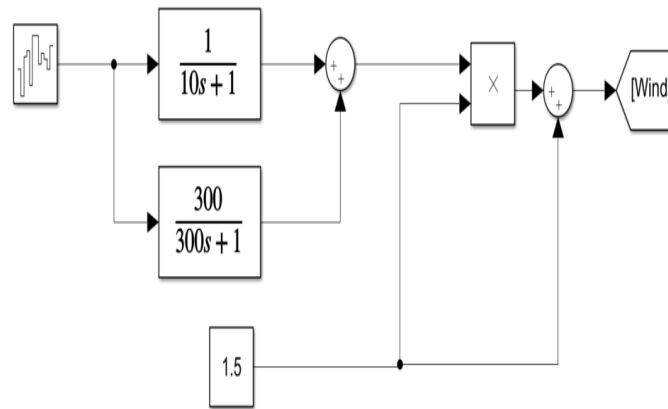


Figura A.1: Modelo de la velocidad del viento en Matlab/Simulink

Una vez descrito el modelo de la velocidad de viento, es posible describir el modelo de ráfagas de viento empleando la siguiente aproximación [1]

$$W_s = V_0 [1 + k \sin(wt)] \quad (\text{A.0.1})$$

Cuya representación en Matlab/Simulink es la siguiente

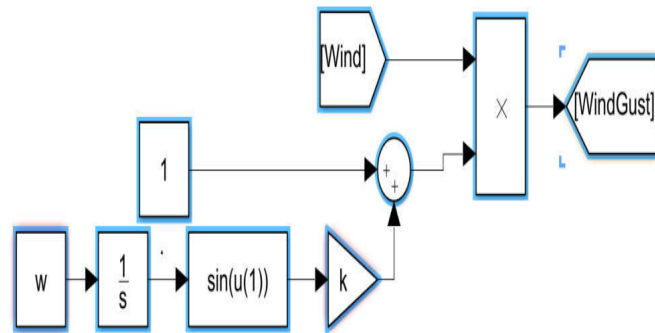


Figura A.2: Modelo de la velocidad del viento en Matlab/Simulink

Donde V_0 denota la velocidad del viento (correspondiendo a Wind en la fig. A.1 y A.2), k es

una ganancia que multiplica la amplitud de las oscilaciones $k \sin(\omega t)$ de la ráfaga de viento.

Los valores de los parámetros son ajustados heurísticamente con la finalidad de obtener un

Figura A.3: Ráfaga de viento. **Izquierda:** Representación en simulink del modelo de ráfagas de viento [1]. **Respuesta en el tiempo del modelo (A.0.1)**

Figura A.4

Par de arrastre (τ_a) El par de arrastre se produce como consecuencia de las fuerzas de arrastre, y tiende a afectar las dinámicas rotacionales del cuadrirrotor [5, 48]. El par de arrastre puede ser expresado como

$$\tau_{a_i} = K_\omega \text{diag}(\omega) \omega \quad (\text{A.0.2})$$

donde $K_\omega = \text{diag}\{k_\phi, k_\theta, k_\psi\}$ es la matriz de arrastre rotacional. La Figura A.5 ilustra la respuesta del par de arrastre

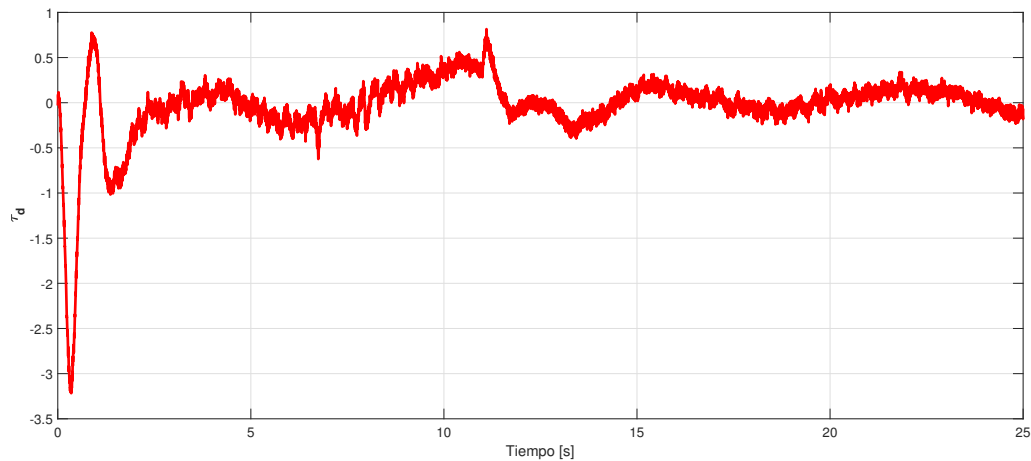


Figura A.5: Par de arrastre

La gráfica describe un decremento monótonico del par de arrastre cuando la velocidad se incrementa en sentido contrario a partir de una baja velocidad. Por otro lado, es posible observar que cuando la velocidad alcanza cierto valor, el par de arrastre comienza a disminuir.

Variaciones en la masa del VANT (Δm) De forma natural, la masa del sistema dinámico del cuadrirrotor cambia cuando el vehículo recoge diferentes objetos. Estos cambios han sido con-

siderados para evaluar los controladores propuestos con la finalidad de garantizar un desempeño óptimo. Estas variaciones en la masa se ven directamente reflejados en el esfuerzo de control por recuperar la trayectoria deseada y preservar la estabilidad.

Apéndice B

Fronteras de $L(t)$

Supóngase que la ganancia adaptable $L(t)$ se incrementa, y V_ξ se hace mas grande que μ^* , es decir $\xi \notin \Omega^*$. Entonces, $\dot{V}_{\xi,L} \leq -\psi V_{\xi,L}^{\frac{1}{2}} - M|L(t) - L^*| < 0$. Se sabe que existe un tiempo finito tal que las dinámicas de ξ se revierten, es decir $\dot{L} = 0$ y en el limite de la estabilidad $\dot{V}_{\xi,L} = 0$. A continuación, se calculara la cota máxima de la ganancia L^+ determinando el dominio mas grande de Ω^* en presencia de perturbaciones externas acotadas. Dadas las dinámicas de L en (3.6.23) cuando $\dot{L} = 0$, es decir

$$\frac{k}{\sqrt{2}}|L - L^*| - \frac{L}{2}|\xi_1| = 0$$

lo que implica

$$|\xi_1| = \frac{\sqrt{2}k}{L}|L - L^*| \quad (\text{B.0.1})$$

Por otro lado, el estado se ve afectado por una perturbación externa acotada. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\xi_1| \leq C \quad (\text{B.0.2})$$

entonces, de las ecuaciones (B.0.1) y (B.0.2), el valor máximo de $L(t)$, denotado por L^+ , esta dado por la siguiente expresión

$$L(t) \leq \frac{\sqrt{2}kL^*}{\sqrt{2}k - C} = L^+ \quad (\text{B.0.3})$$

de tal modo que la ganancia adaptable es acotada como

$$0 < L^* < L(t) \leq L^+$$

Con el objetivo de determinar el dominio mas grande de Υ^+ , se puede considerar que $\dot{V}_{\xi,L} \leq 0$ dentro de Υ^+ . Cuando $L(t)$ se incrementa hasta alcanzar L^* , \dot{L} tiende a cero. Entonces, la ganancia adaptable es revertida, reduciéndose en magnitud. Entonces, cuando $L = L^+$, de la ec. (3.6.21) con $\dot{L} = 0$, tenemos

$$\dot{V}_{\xi,L} \leq -\psi V_{\xi}^{\frac{1}{2}} + \frac{L^+}{2} |\xi_1| \leq 0 \quad (\text{B.0.4})$$

Entonces, de la desigualdad (B.0.1), obtenemos

$$V_{\xi} \leq \left(\frac{L^+ C}{2\psi} \right)^2 \quad (\text{B.0.5})$$

Entonces, el dominio mas grande de Υ^+ esta dado por

$$\Upsilon^+ = \{\xi | V_{\xi} \leq \mu^+\}$$

el cual es un conjunto compacto. Tomando en cuenta la **Definición 1**, la ley de adaptación proporciona la convergencia del sistema hacia un modo deslizante real de segundo orden. La trayectoria del sistema alcanza el dominio de Υ^* y permanece dentro del dominio, abandonándolo debido a la acción de la pequeña ganancia en contra de la perturbación y entrando a Υ^+ . Entonces, los estados ξ vuelven hacia el dominio Υ^* tan pronto como la ganancia adaptable compense el efecto de la perturbación. Además, el "tamaño" del modo deslizante real de segundo orden puede determinarse tan rápido como el estado alcance el dominio Υ^* , y de (3.6.10)

$$\xi_1 = |z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) = |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \leq \mu_1 \quad (\text{B.0.6})$$

de (B.0.6), y tomando el valor absoluto de s , resulta

$$|s| = |\xi_1|^2 < C^2$$

Ahora, expresando las dinámicas de la variable deslizante \dot{s} en términos de ξ_1, ξ_2 , resulta

$$|\dot{s}| \leq |2L(t)\xi_1| + |L(t)\xi_2| + \delta$$

donde $L(t)\xi_2 = z_2 = \int_0^{t_1} \frac{L^2(\tau)}{2} \text{sign}(s) d\tau$. Tomando el valor absoluto de \dot{s} , obtenemos

$$|\dot{s}| \leq |2L(t)\xi_1| + |L(t)\xi_2| + \delta \quad (\text{B.0.7})$$

donde $|2L(t)\xi_1| < 2L^+C$ y $|L(t)\xi_2| \leq \frac{(L^+)^2}{2} t_1$. Con el propósito de estimar t_1 , consideramos

$$\dot{L}(t) = \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}}|L(t) - L^*| + \frac{L(t)}{2}|\xi_1|}{(L(t) - L^*) - \frac{2}{L(t)}(\xi^T S_\infty B B^T \xi)} = \frac{-\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{L(t)}{|L(t) - L^*|}|\xi_1|}{1 - \frac{(\xi^T S_\infty B B^T \xi)}{|L(t) - L^*|}} \quad (\text{B.0.8})$$

Si consideramos que el termino $\frac{(\xi^T S_\infty B B^T \xi)}{|L(t) - L^*|}$ pequeño, y considerando que $L < L^+$ y $|\xi_1| < C$, resulta que

$$\dot{L} \approx -\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{L}{\Delta L}|\xi_1| \approx -\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{L^+}{\Delta L}C =: \gamma$$

Entonces, $L(t) = L(0) + \gamma t_1 < L^+$ implica

$$T = \frac{L^+ - L(0)}{\gamma}, t_1 \quad (\text{B.0.9})$$

Tan pronto como el estado del sistema alcance el dominio Υ^* en el tiempo $T_1 > t_1$, el tamaño del modo deslizante real de segundo orden puede estar de acuerdo con

$$|s| < C^2, \quad |\dot{s}| < 2L^+C + \frac{(L^+)^2}{2} T$$

lo cual determina la precisión practica para el algoritmo (3.6.14)

Apéndice C

Indices de desempeño

Los errores y el tiempo en que ocurre el error son factores importantes que a menudo deben ser considerados simultáneamente. Un índice de desempeño es una medición única del desempeño de un sistema que enfatiza aquellas respuestas que son consideradas importantes. El conocimiento de un índice de desempeño es un factor importante para el diseño de controladores. En la teoría de control óptimo, el principal problema es encontrar un control $u^* \in U$ el cual garantice que el sistema [49, 50]

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u(t) \quad (\text{C.0.1})$$

siga una trayectoria $x^* \in X$, que minimiza el índice de desempeño

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t)) dt \quad (\text{C.0.2})$$

Cada índice de desempeño evalúa parámetros del controlador con la finalidad de optimizar la respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador. A continuación se introducen algunos índices de desempeño comunes en la literatura:

Integral del Error Cuadrático (IEC) Este índice de desempeño es utilizado mayormente para indicar sobreimpulsos y controles agresivos. La expresión del IEC esta dada por

$$IEC = \int_{t_0}^{t_f} e^2(t) dt \quad (\text{C.0.3})$$

donde $e(t) = x_1 - x_1^d$ denota el error de seguimiento. El IEC minimiza principalmente los errores de magnitud elevada. Sin embargo, los sistemas optimizados con este índice presentan oscilaciones de baja amplitud debido a que la presencia de pequeñas desviaciones del estado con respecto a la referencia no brindan peso al criterio de desempeño [5, 51].

Integral del Valor Absoluto del Error (IVAE) La ecuación matemática que describe al IVAE es

$$IVAE = \int_{t_0}^{t_f} |e(t)| dt \quad (C.0.4)$$

donde $e(t) = x_1 - x_1^d$ denota el error de seguimiento. El objetivo del IVAE es minimizar desviaciones, del estado con respecto al valor de referencia, en ambas direcciones. Este índice es menos conservativo que el IEC y tiene una relación mas estrecha a la conservación de energía [51].

Integral del Tiempo por el Valor Absoluto del Error (ITVAE) El ITVAE es un índice de desempeño muy conservativo que penaliza desviaciones grandes, así como la duración de las oscilaciones. Este es expresado por

$$\int_{t_0}^{t_f} t |e(t)| dt \quad (C.0.5)$$

donde $e(t) = x_1 - x_1^d$ denota el error de seguimiento. Este agrega peso mayormente a errores grandes que ocurren después de cierto tiempo, mientras que resta énfasis en errores durante las condiciones iniciales [5, 51].

Integral del Tiempo por el Error Cuadrático (ITEC) Este índice esta dado por la siguiente expresión

$$ITEC = \int_{t_0}^{t_f} t e^2 dt \quad (C.0.6)$$

donde $e(t) = x_1 - x_1^d$ denota el error de seguimiento. Este índice penaliza el tiempo durante el cual se mantienen las desviaciones con respecto al valor de referencia [5].

Medida de Desempeño Modificada (MPM) Con la finalidad de conservar la energía de control, garantizando el seguimiento de trayectorias [50], se emplea el siguiente índice de desempe-

ño

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [||e(t)||^2 + ||u(t)||^2] dt \quad (\text{C.0.7})$$

donde $e(t) = x_1 - x_1^d$ denota el error de seguimiento, $u(t)$ es la entrada de control.

Integral del Control Cuadrático (ICC) Este índice puede ser expresado por

$$ICC = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad (\text{C.0.8})$$

donde $u(t)$ denota la entrada de control. Este criterio minimiza la cantidad de energía disipada por el controlador para garantizar la convergencia al valor deseado y mantener el error en cero [50].

Integral del Control Absoluto (ICA) El ICA esta expresado como

$$ICA = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (\text{C.0.9})$$

donde $u(t)$ denota la entrada de control. El propósito de este criterio de desempeño es reducir el gasto total de energía, minimizando el esfuerzo de control [50].



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

INFORME RAZONADO

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

Pedro de Alba S/N, Ciudad Universitaria, C.P. 66451, San Nicolás de los Garza, N.L.

SR. COORDINADOR DEL PROGRAMA EDUCATIVO

Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

1.- ¿Considera que el aporte científico/tecnológico de la tesis tiene el nivel de maestría/doctorado?

☒ SI

☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

El aporte científico presenta un nivel apropiado para el nivel maestría, el cual contribuye a la ciencia y tecnología estudios comparativos de estrategias de control aplicadas a vehículos aéreos no tripulados. Se estudiaron metodologías de control no lineal por modos deslizantes super twisting adaptativos basados en observadores de alto orden por modos deslizantes. Además, se dio validez a los resultados mediante simulación numérica.

2.- De acuerdo con la información confidencial que pudiese contener la tesis ¿Considera que puede ser publicada en líneas en el portal de la UANL?

☒ SI

☐ NO

Comentarios (agregar un mínimo de 200 caracteres)

El documento no contiene información confidencial, motivo por el cual puede ser publicado. Este documento ha sido revisado a detalle, comprobando que no existe información de propiedad intelectual industrial, y solamente contiene información general del área de control no lineal.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

3.- ¿La redacción de la tesis es clara y contiene todos los elementos según la metodología científica?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

La redacción de la tesis está clara y se ha realizado de acuerdo a la metodología científica. Se brindan objetivos e hipótesis, pruebas experimentales en simulación y conclusiones. Finalmente se propuso trabajo para la posterioridad, para retomar la presente tesis y realizar comparaciones con métodos mas modernos.

4.- ¿Hay impacto de la tesis en algún sector de la comunidad?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

Contiene avances teóricos en el área de vehículos autónomos (Drones), donde se evalua el desempeño del modelo no lineal del cuadrirrotor cuando ejecuta una tarea por medio de simulación numérica via Matlab/Simulink.

5.- ¿Hay congruencia entre los resultados obtenidos y objetivos propuestos?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

Los resultados del documento cumple con los objetivos propuestos. Se desarrollaron las estrategias de control propuestas, y se evaluo comparativamente el desempeño de estas al ser aplicadas al modelo matemático de un cuadrirrotor.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

6.- El trabajo escrito ¿posee las características formales de una memoria de tesis

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

El trabajo de investigación cumple con las características necesarias, siendo redactada en formato científico-académico. Esta incluye la portada/título, agradecimientos, índice, abstract, introducción, desarrollo del tema, conclusiones, etc. Así como todos los elementos del método científico.

7.- Favor de emitir su recomendación seleccionando una de las siguientes opciones:

- ☒ Aceptada para su defensa
☐ Aceptada con correcciones menores
☐ Aceptada con correcciones mayores
☐ Rechazada

Comentarios opcionales:

La tesis cumple con los requisitos.

8.- Observaciones (utilizar tantas hojas en blanco como se necesite):

Dr. Jesús de León Morales

Revisor

Avala

Dr. Ernesto Vázquez Martínez.

Coordinador del programa educativo



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

INFORME RAZONADO

Universidad Autónoma de Nuevo León
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
 Subdirección de Estudios de Posgrado
 Pedro de Alba S/N, Ciudad Universitaria, C.P. 66451, San Nicolás de los Garza, N.L.
 SR. COORDINADOR DEL PROGRAMA EDUCATIVO
 Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica

1.- ¿Considera que el aporte científico/tecnológico de la tesis tiene el nivel de maestría/doctorado?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

Sí, el trabajo de investigación tiene contribuciones importantes al conocimiento científico y tecnológico de aplicación industrial relacionado a cuadrirrotors no tripulados. Se prueban diferentes algoritmos innovadores como modos deslizantes supertwisting y modos deslizantes de alto orden y se realiza trabajo experimental y análisis obteniendo de esta manera conclusiones congruentes y bien sustentadas.

2.- De acuerdo con la información confidencial que pudiese contener la tesis ¿Considera que puede ser publicada en líneas en el portal de la UANL?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (agregar un mínimo de 200 caracteres)

La tesis de ninguna manera contiene información que pudiera ser confidencial. La tesis fue revisada detalladamente proporcionando sólo información generalizada del trabajo de investigación, verificando de esta manera que no existiera información sensible y con posible información de propiedad industrial.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

3.- ¿La redacción de la tesis es clara y contiene todos los elementos según la metodología científica?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

La tesis está redactada de manera clara y correcta apegándose al español conforme a la real academia de la lengua. Se apega estrictamente a la metodología científica, con objetivos e hipótesis, realizando pruebas y experimentos que son analizados profundamente llegando a las conclusiones más relevantes.

4.- ¿Hay impacto de la tesis en algún sector de la comunidad?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

El estudio implica mejoras y avances tecnológicos que impactan positiva y significativamente el control y maneobrabilidad de los cuadrirrotos autotripulados, de igual manera la eficiencia del uso de recursos materiales y energéticos es impactada enormemente de manera favorable.

5.- ¿Hay congruencia entre los resultados obtenidos y objetivos propuestos?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

Efectivamente, la hipótesis planteada en el trabajo de tesis es demostrada fehacientemente. Se proponen algoritmos nuevos e innovadores, los cuales se someten a pruebas y experimentos, cuyos resultados, después de ser analizados a profundidad demuestran que la hipótesis planteada se cumple.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

6.- El trabajo escrito ¿posee las características formales de una memoria de tesis

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)


La tesis está estrictamente escrita y redactada en el formato científico/académico. Conteniendo así, de esta manera, sin embargo; todos los elementos del método científico: objetivos, hipótesis, experimentos, análisis y conclusión; y contando con todos los elementos de una tesis científica/académica.

7.- Favor de emitir su recomendación seleccionando una de las siguientes opciones:

- ☒ Aceptada para su defensa
- ☐ Aceptada con correcciones menores
- ☐ Aceptada con correcciones mayores
- ☐ Rechazada

Comentarios opcionales:

8.- Observaciones (utilizar tantas hojas en blanco como se necesite):


Dr. Alberto Cavazos González

Revisor

Avala:




UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA


Dr. Ernesto Vázquez Martínez
Coordinador del programa educativo



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

INFORME RAZONADO

Universidad Autónoma de Nuevo León
 Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
 Subdirección de Estudios de Posgrado
 Pedro de Alba S/N, Ciudad Universitaria, C.P. 66451, San Nicolás de los Garza, N.L.
 SR. COORDINADOR DEL PROGRAMA EDUCATIVO
 Maestría en ciencias de la ingeniería eléctrica

1.- ¿Considera que el aporte científico/tecnológico de la tesis tiene el nivel de maestría/doctorado?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

El trabajo proporciona el aporte científico correspondiente al nivel maestría, el cual incluye el estudio de técnicas de control aplicadas a vehículos aéreos no tripulados. Se estudiaron y comprobaron metodologías de control no lineal por modos deslizantes de alto orden y backstepping basados en observadores de estado no lineales por modos deslizantes. Estas metodologías fueron evaluadas mediante simulación numérica, permitiendo así, obtener resultados satisfactorios

2.- De acuerdo con la información confidencial que pudiese contener la tesis ¿Considera que puede ser publicada en líneas en el portal de la UANL?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (agregar un mínimo de 200 caracteres)

El documento no contiene información confidencial. Se ha evaluado a detalle este documento, y ha sido comprobado que no existe información reservada o de propiedad intelectual industrial, y únicamente contiene información en general de estudios de control no lineal aplicado a navegación autónoma de vehículos aéreos no tripulados.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

IT-8-SPG-05-R06

3.- ¿La redacción de la tesis es clara y contiene todos los elementos según la metodología científica?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

La tesis se encuentra redactada de forma clara y realizada de acuerdo a la metodología científica establecida. Esta incluye objetivos e hipótesis, pruebas experimentales y conclusiones, obtenidos a partir de un experimento en simulación numérica. Además, se propusieron estudios a futuro para retomar la presente tesis y realizar comparaciones con métodos contemporáneos.

4.- ¿Hay impacto de la tesis en algún sector de la comunidad?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

La tesis presenta avances teóricos y tecnológicos, orientados al control de vehículos autónomos cuadrirrotors, donde realizan estudios que permiten mejorar desempeño del cuadrirrotor durante el vuelo, realizando el seguimiento de trayectorias y siendo evaluado por medio de simulación numérica que incluyen condiciones reales de vuelo.

5.- ¿Hay congruencia entre los resultados obtenidos y objetivos propuestos?

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

Los resultados del documento tienen congruencia con los objetivos propuestos. Se estudian y desarrollan las estrategias de control propuestas, y se evalúa de forma comparativa el desempeño del cuadrirrotor cuando estas estrategias son aplicadas a su modelo matemático, logrando así el objetivo que se propuso inicialmente.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

6.- El trabajo escrito ¿posee las características formales de una memoria de tesis

☒ SI ☐ NO

Comentarios (Agregar un mínimo de 200 caracteres)

El trabajo de investigación satisface las características deseadas de una memoria de tesis, siendo redactada en el formato científico-académico. Se incluye portada/título, índice, resumen e introducción, desarrollo del tema y conclusiones. Además, se incluyeron todos los elementos del método científico, redactados en forma clara y concisa.

7.- Favor de emitir su recomendación seleccionando una de las siguientes opciones:

- ☒ Aceptada para su defensa
- ☐ Aceptada con correcciones menores
- ☐ Aceptada con correcciones mayores
- ☐ Rechazada

Comentarios opcionales:

La tesis ha sido aprobada, dado que satisface los requisitos.

8.- Observaciones (utilizar tantas hojas en blanco como se necesite):

Dr. Oscar Salvador Salas Peña

Revisor



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

Avala:

Dr. Ernesto Vázquez Martínez.

Coordinador del programa educativo



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DICTAMEN DE TESIS DE GRADO

Resumir el aporte científico/tecnológico de la tesis, así como su impacto en el sector productivo de la sociedad. Detallar los elementos de la metodología científica que usted encontró en el documento, así como la relación entre los resultados obtenidos y los objetivos propuestos. Indicar si existe algún impedimento para que el documento sea publicado en el Portal de la UANL. **Si la tesis no fue aprobada, debe justificar por qué. Si hay correcciones, deberá indicarse cuáles son éstas.**

(Escribir un mínimo de 2000 caracteres)

El presente trabajo aborda el problema de control de seguimiento de trayectorias del cuadrirrotor bajo la presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Se propone el diseño de algoritmos de control y observación para el cuadrirrotor basándose en técnicas de control no lineal por Modos Deslizantes, ya que brinda ventajas como: robustez ante incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas acotadas y dinámicas no modeladas; así como convergencia en tiempo finito y estabilidad asintótica.

El cuadrirrotor es uno de los vehículos aéreos no tripulados(VANT) de pequeña escala mas populares en la actualidad. Este encuentra un propósito dentro de una amplia cantidad de aplicaciones tales como entretenimiento, fotografía, investigación, generación de mapas, entre otras.

Por lo tanto, es necesario desarrollar algoritmos de control efectivos que garanticen el desempeño durante la ejecución de dichas tareas.

Se propone la implementación de Controles por Modos Deslizantes Super Twisting Adaptativos basados en Observadores de Alto Orden por Modos Deslizantes para una clase de sistemas no lineales. Utilizando las herramientas de la teoría de Lyapunov, se proporciona un análisis de estabilidad donde se brindan condiciones de suficiencia para garantizar la convergencia en tiempo finito del sistema en lazo cerrado con el esquema control-observador propuesto.

Además, se introdujo una metodología de sintonización de ganancias del observador de alto orden por SM combinada con la ganancia adaptable del controlador super twisting. El análisis de estabilidad se basa en el enfoque de Lyapunov, donde se proporcionan condiciones de suficiencia para garantizar la convergencia a cero en tiempo finito de la variable deslizante y sus dinámicas.

Finalmente, los esquemas de control fueron implementados en Matlab/Simulink en presencia de perturbaciones externas, donde se evaluó el desempeño bajo diferentes criterios. Se observó una mejora significativa en la reducción de chattering, rechazo a perturbaciones y reducción de ruido blanco para el esquema ASTC+HOSMO. Los índices de desempeño IEA, ITEC e ITVAE demostraron que el esquema ASTC+HOSMO brinda un mejor desempeño y una mayor precisión en el seguimiento de trayectorias. Estos resultados se deben a la robustez del controlador y su convergencia en tiempo finito. Además, se evaluaron individualmente los índices de desempeño de las entradas de control, donde el esquema ASTC+HOSMO alcanza el objetivo de control conservando la energía.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DECISIÓN FINAL (Marque con una ✓)

APROBADA PARA SU DEFENSA	<input checked="" type="checkbox"/>
APROBADA CON CORRECCIONES MENORES	<input type="checkbox"/>
RECHAZADA	<input type="checkbox"/>

Avala:


 Dr. Ernesto Vázquez Martínez

 Coordinador del programa educativo